Soluţii

Sesiunea iunie-iulie 1999

5. Profilul uman – proba c

Varianta nr.1

I. 1) a) $2^{2x-3}=2^{2(x^2-3x-1)}\Rightarrow 2x-3=2(x^2-3x-1)\Leftrightarrow 2x^2-8x+1=0\Rightarrow x\in\left\{\frac{4+\sqrt{14}}{2},\frac{4-\sqrt{14}}{2}\right\}$

b) lg[(x-3)(x-6)]=lg 10 $\Rightarrow$(x-3)(x-6)=10. Soluţie convenabilă x$\in${4}.

2) a) Din condiţiile impuse rezultă sistemul:

$\begin{cases} a_1+8r=5(a_1+r) \\ a_1+12r=2(a_1+5r)+5 \end{cases}$ cu soluţiile $\begin{cases} a_1=3 \\ r=4 \end{cases}$

b) $S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{(3+3+99\cdot 4)\cdot 100}{2}=20100$.

3) a) Vom arăta că xy-2(x+y)+6$\geq$2 $\Leftrightarrow$ (x-2)(y-2)$\geq$0, inegalitate evidentă

deoarece x$\geq$2, y$\geq$2.

b) Asociativitatea rezultă imediat.

Vom căuta elementul neutru:

x*e=e*x=x, $\forall$x$\in$G $\Leftrightarrow$ xe-2(x+e)+6=x$\Leftrightarrow$xe-2e=3x-6$\Leftrightarrow$e(x-2)=3(x-2)$\Rightarrow$e=3

Elemente simetrzabile: x*x'=x'*x=3

Din condiţia impusă rezultă: $x'=\frac{2x-3}{x-2}$, x$\neq$0 şi $\frac{2x-3}{x-2}\geq 2$ cu soluţia x$\in$(2,+∞). Deci elementele simetrizabile sunt G-{2}.

II. 1) a) $f'(x)=\frac{3x+4}{x^3}$ Folosim tabelul de semn al derivatei:

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		0		$+\infty$
f'(x)	+	+	0	-	$\vert$	+	+
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{25}{8}$	$\searrow$	$\vert$	$\nearrow$	$+\infty$

Obţinem că f este strict crescătoare pe $\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right]$, strict descrescătoare pe $\left(-\frac{4}{3},0\right)$, strict crescătoare pe (0,+∞) şi are un maxim $M\left(-\frac{4}{3},\frac{25}{8}\right)$.

b) Graficul funcţiei admite punctul de inflexiune I(-2,3) deoarece f''(-2)=0 şi semnul lui f''(x) de o parte şi de alta este diferit.

2) a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}\underset{L'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x-7}{2x-8}=1$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x+3}{2^x-3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x\ln 2}{2^x\ln 2}=1$

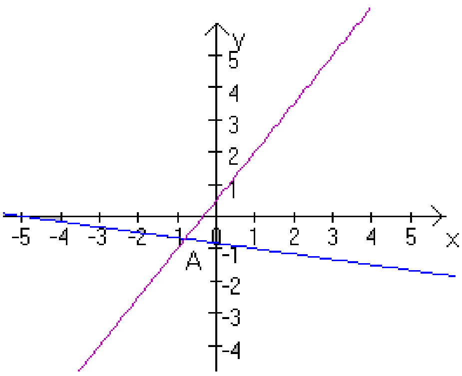
c) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2^x+3}{2^x-3}=-1$

3) $\int_1^b (b-4x)dx=\int_1^b bdx-\int_1^b 4xdx=bx\Big|_1^b-2x^2\Big|_1^b=-b^2-b+2$.

Folosind condiţia din enunţ avem egalitatea: $-b^2-b+2=6-5b \Rightarrow b=2$.

III. a) Coordonatele lui A rezultă rezolvând sistemul: $\begin{cases}3x-2y+1=0\\ x+6y+5=0\end{cases}$,

cu soluţiile $\begin{cases}x=-\dfrac{4}{5}\\ y=-\dfrac{7}{10}\end{cases}$



b) Deci avem $A\left(-\dfrac{4}{5},-\dfrac{7}{10}\right)$.

Ecuaţia dreptei AM: $x+\dfrac{4}{5}=0$

Ecuaţia cercului cu centrul în A şi care trece prin M va fi:

$$\left(x+\frac{4}{5}\right)^2+\left(y+\frac{7}{10}\right)^2=\left(\sqrt{\left(-\frac{4}{5}+\frac{4}{5}\right)^2+\left(1+\frac{7}{10}\right)^2}\right)^2$$

$$\Rightarrow\left(x+\frac{4}{5}\right)^2+\left(y+\frac{7}{10}\right)^2=\left(\frac{17}{10}\right)^2.$$