Soluţii

Sesiunea iunie-iulie 1999

5. Profilul uman – proba c

Varianta nr.2

I. 1) a) Ecuaţia devine 6-2(x+1)=2(x^2-1)-(x+1)(x+4) $\Leftrightarrow$ x^2-x-2=0. Soluţie convenabilă x$\in$\{2\}.

b) $4^x - 10\cdot 2^{x-1} = 24 \Leftrightarrow 2^{2x} - 5\cdot 2^x = 24 \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 - 5\cdot 2^x - 24 = 0$

Notăm 2^x=t. Ecuaţia devine t^2-5t-24=0 cu t$\in$\{8,-3\}. Revenim la notaţi şi obţinem soluţia convenabilă x$\in$\{3\}.

2) Relaţia de demonstrat este echivalentă cu:

lg$(a+2b)^2$-lg 16=lg a+lg b $\Leftrightarrow$ $\frac{(a+2b)^2}{16} = ab \Leftrightarrow a^2 + 4b^2 = 12ab$. Am obţinut relaţia din ipoteză şi deci relaţia de demonstrat este adevărată.

3) $\Delta_s = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -32$ $\Rightarrow$ Sistemul este de tip Cramer şi are soluţiile: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s} = 1,\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s} = 2,\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta_s} = 3$.

II. 1) a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-1} + \frac{2-3x^2}{x^2-1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+2}{x-1} + \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-3x^2}{x^2-1} = 1-3 = -2$.

b) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x-2}-1} = \lim\limits_{x\to 3}\frac{2x}{\frac{1}{2\sqrt{x-2}}} = \lim\limits_{x\to 3}\left(2x\cdot 2\sqrt{x-2}\right) = 12$.

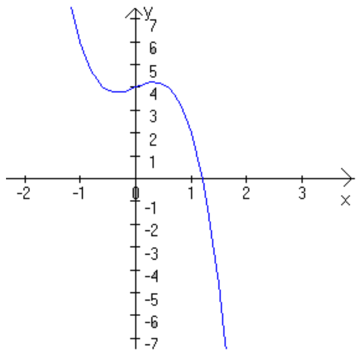
2) f'(x)=-9x^2+1 cu rădăcinile $x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = \frac{1}{3}$.

f''(x)=-18x cu rădăcina x=0. Asimptote nu avem.

Tabelul de variaţie:

x	-∞		$-\frac{1}{3}$		0		$\frac{1}{3}$		+∞
f'(x)	-	-	0	+	+	+	0	-	-
f(x)	+∞	↘	$\frac{34}{9}$	↗	4	↗	$\frac{38}{9}$	↘	-∞
f''(x)	+	+	+	+	0	-	-	-	-

Graficul funcţiei:



Graficul funcţiei are un punct

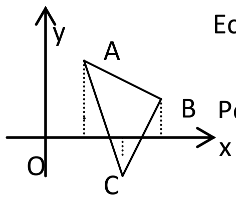
de inflexiune A(0,4).

3) a) $$F(x)=\int f(x)dx=\int \frac{x^2}{2}dx-\int 3xdx+\int \frac{2}{(x-3)^3}dx=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2\frac{-1}{(x-3)^2}+C=\frac{x^3}{6}-\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{(x-3)^2}+C$$

b) F(-1)=0 ⇒ $\frac{-1}{6}-\frac{3}{2}-\frac{2}{16}+C=0\Rightarrow C=\frac{43}{24}$. Deci primitiva care îndepli-neşte condiţia din enunţ este:

$$F(x)=\frac{x^3}{6}-\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{(x-3)^2}+\frac{43}{24}.$$

III. a)



Ecuaţia dreptei AB: $\frac{y-2}{1-2}=\frac{x-1}{3-1}\Leftrightarrow x+2y-5=0$

Pentru a arăta că A,B,C sunt necoliniare vom arăta că punctul C nu aparţine dreptei AB, că 2-2-5≠0

b)
$$d(A,B)=\sqrt{(1-3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{5}$$
$$d(A,C)=\sqrt{(1-2)^2+(2+1)^2}=\sqrt{10}$$
$$d(B,C)=\sqrt{(3-2)^2+(1+1)^2}=\sqrt{5}$$

Din $d^2(A,C)=d^2(A,B)+d^2(B,C)$ ⇒ conform reciprocei teoremei lui Pitagora că ΔABC este dreptunghic în B. Deci centrul cercului circumscris va fi mijlocul ipotenuzei, cu coordonatele:

$$\left.\begin{aligned}x_M&=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}\\ y_M&=\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow M\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Raza cercului circumscris lui triunghiului ABC va fi de $\frac{\sqrt{10}}{2}$.