Soluţii

Sesiunea iunie-iulie 1999

6. Profilul uman – proba f

Varianta nr.1

I. 1) a) Condiţii de existenţă: $x\neq 7$, $x\neq 3$ (1)

$$\left(2^5\right)^{\frac{x+5}{x-7}} = 2^{-2}\cdot\left(2^7\right)^{\frac{x+17}{x-3}} \Leftrightarrow 2^{\frac{5x+25}{x-7}} = 2^{-2+\frac{7x+119}{x-3}} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \frac{5x+25}{x-7} = \frac{5x+125}{x-3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5(x+5)(x-3) = 5(x+25)(x-7) \Leftrightarrow x^2+2x-15 = x^2+18x-175 \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$\Rightarrow x=10$ soluţie. (funcţia $f:\mathbf{R}\to(0,+\infty)$, $f(x)=2^x$ este injectivă (2)).

b) Condiţii de existenţă: $\begin{cases} 3x+5>0, 3x+5\neq 1 \Leftrightarrow x>-\frac{5}{3}, x\neq -\frac{4}{3} \\ 9x^2+8x+2>0 \Leftrightarrow x\in R\ (\Delta<0) \end{cases} \Rightarrow x\in\left(-\frac{5}{3},\infty\right)-\left\{-\frac{4}{3}\right\}$ (1)

$$\log_{3x+5}\left(9x^2+8x+2\right)=\log_{3x+5}(3x+5)^2 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 9x^2+8x+2=9x^2+30x+25 \Rightarrow$$

Funcţia logaritmică este injectivă (2).

$$\Rightarrow x=-\frac{23}{22} \overset{(1)}{\Rightarrow} S=\left\{-\frac{23}{22}\right\}$$

2) Fie P(n): 1+(1+2)+(1+2+3)+…+(1+2+…+n)= $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$, $n\in\mathbf{N}^*$

Demonstrăm P(n) prin inducţie matematică.

1^0 P(1): 1= $\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} \Leftrightarrow 1=\frac{6}{6}$ ''1''

2^0 Demonstrăm că $P(k)\Rightarrow P(k+1)$. Presupunem P(k) adevărată

P(k): 1+(1+2)+…+(1+2+…+n)= $\frac{k(k+1)(k+2)}{6}$

Demonstrăm că P(k+1) este adevărată

P(k+1): 1+(1+2)+…+(1+2+…+k)+(1+2+…+k+k+1)= $\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6} \Leftrightarrow$

$$\frac{k(k+1)(k+2)}{6}+\frac{(k+1)(k+2)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6} \quad ''1''$$

Din 1^0 şi 2^0 $\Rightarrow$ P(n) este adevărată, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

3) Fie d determinantul sistemului (S) $d=\begin{vmatrix} \alpha+2 & 3 \\ 3 & \alpha^2-2\alpha+4 \end{vmatrix} = \alpha^3-1$

d=0 $\Rightarrow$ $\alpha^3-1=0 \Leftrightarrow (\alpha+1)(\alpha^2+\alpha+1)=0 \Leftrightarrow \alpha=1$ sau $\alpha^2+\alpha+1=0$ cu $\Delta<0 \Rightarrow \alpha=1$.

Pentru $\alpha \neq 1$ avem $d \neq 0 \Rightarrow$ (S) sistem compatibil determinat, $x = \frac{d_x}{d}, y = \frac{d_y}{d}$, unde

$$d_x = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & \alpha^2 - 2\alpha + 4 \end{vmatrix} = \alpha^2 - 2\alpha - 2;\ d_y = \begin{vmatrix} \alpha + 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\alpha + 1;$$

Pentru $\alpha = 1$

$$(S)\ \begin{cases} 3x + 3y = 1 \\ 3x + 3y = 2 \end{cases}$$ sistem incompatibil.

Deci $S = \begin{cases} \left(\frac{\alpha^2 - 2\alpha - 2}{\alpha^3 - 1}, \frac{2\alpha + 1}{\alpha^3 - 1} \right), \text{dacă } \alpha \neq 1 \\ \Phi \qquad\qquad\qquad\qquad\quad , \text{dacă } \alpha = 1 \end{cases}$.

II. 1) a) f – funcţie derivabilă (fiind funcţie elementară)

$$f'(x) = \frac{(2x-3)'(x^2+4) - (2x-3)(x^2+4)'}{(x^2+4)^2} = \frac{-2x^2+6x+8}{(x^2+4)^2}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2+6x+8=0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 4\}$

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	+	0	-	-
$f(x)$	$\searrow$		-5	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	

Din tabel $\Rightarrow$ f este strict descrescătoare pe $(-\infty,-1] \cup [4,+\infty)$, iar pe $[-1,4]$ este strict crescătoare.

-1 punct de minim; 4 punct de maxim.

b) f e continuă pe $(-\infty,2)$, $(2,4)$ (restricţii de funcţii elementare) (1)

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} [\alpha \log_2 (4-x)] = \alpha \log_2 2 = \alpha;\ f(2) = \alpha \log_2 2 = \alpha \\ &\lim_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} \frac{x^2+x-6}{x^2-7x+10} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x-5)} = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} \frac{x+3}{x-5} = -\frac{5}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

f continuă în 2 $\Leftrightarrow \alpha = -\frac{5}{3}$ (2)

Din (1) şi (2) $\Rightarrow$ f este continuă pe $(-\infty,4) \Leftrightarrow \alpha = -\frac{5}{3}$.

3) a) $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \ln x \cdot (\ln x)' dx = \ln x \cdot \ln x \Big|_1^e - \underbrace{\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx}_{I}$

$I = 1 - I \Leftrightarrow 2I = 1 \Leftrightarrow I = \frac{1}{2}$.

b) $\int_1^4 (\sqrt{x}+2)^3 dx = \int_1^4 (x\sqrt{x}+6x+12\sqrt{x}+8)dx = \int_1^4 \left(x^{\frac{3}{2}}+6x+12x^{\frac{1}{2}}+8\right)dx =$

$= \left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+6\frac{x^2}{2}+12\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+8x\right)\Bigg|_1^4 = \frac{2}{5}\left(\sqrt{4^5}-\sqrt{1^5}\right)+3\left(4^2-1^2\right)+$

$+8\left(\sqrt{4^3}-\sqrt{1}\right)+8(4-1)=\frac{2}{5}.$

III. a) $AB: \frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{x-x_A}{x_B-x_A} \Leftrightarrow \frac{x-2}{-3-2}=\frac{y-3}{-1-3} \Leftrightarrow$ 5y-4x-7=0

A,B,C coliniare $\Leftrightarrow$ C$\in$AB $\Leftrightarrow$ $5y_C-4x_C-7=0$ $\Leftrightarrow$ $10-12-7\neq 0$ fals $\Rightarrow$ C$\notin$ AB $\Rightarrow$A,B,C nu sunt coliniare.

b) Fie d dreapta ce trece prin C şi are panta $\frac{3}{2}$ $\Rightarrow d: y=\frac{3}{2}(x-x_C)+y_C$

$d: y=\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}+2 \Rightarrow d: 2y-3x+5=0$

$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_B)^2}=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}$

$BC=\sqrt{(-3-3)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

$AC=\sqrt{(2-3)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}$.