Soluţii

Sesiunea iunie-iulie 1999

6. Profilul uman – proba f

Varianta nr.3

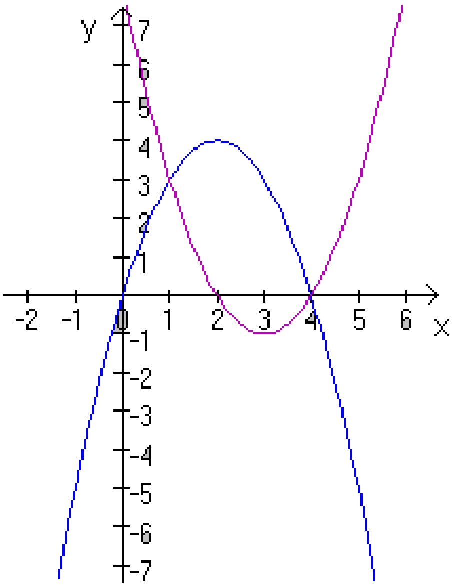
I. 1) a) $A(1,3)\in G_f \cap G_g \Leftrightarrow f(1)=g(1)=3 \Leftrightarrow 1-6+m=3 \Leftrightarrow m=8$

b) Fie V vârful parabolei asociat funcţiei f, iar V' cel asociat lui g

$x_V = -\dfrac{b}{2a} \Rightarrow x_V=2,\ x_{V'}=3$

$f(x)=0 \Leftrightarrow x\in\{0,4\}$, $g(x)=0 \Leftrightarrow x\in\{2,4\}$

x	-∞	-1	0	1	2	3	4	5	∞
f(x)		-5	0	3	4	3	0	-5	
g(x)		15	8	3	0	-1	0	3	



2) a) Folosim schema lui Horner

	1	0	-3	2
1	1	1	-2	0

Obţinem: $(t-1)^2(t+2)=0$

$t_1=t_2=1,\ t_3=-2$

$S=\{1,-2\}$

b) Condiţii de existenţă: $\begin{cases} x-1>0 \\ x+1>0 \\ 5-x>0 \end{cases} \Rightarrow x\in(1,5)\quad (1)$

Cum $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) = -\log_3(x-1)$, iar $\log_{\sqrt{3}}(5-x) = 2\log_3(5-x)$ ecuaţia devine $\log_3\dfrac{(5-x)^2}{(x-1)(x+1)} = \log_3 1$. Pe baza injectivităţii funcţiei logaritmice, obţinem $25-10x+x^2=x^2-1 \Rightarrow x=\dfrac{13}{5} \overset{(1)}{\Rightarrow} S=\left\{\dfrac{13}{5}\right\}$.

3) a) $\Delta(7) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & -4 \\ 2 & -4 & -4 \end{vmatrix} = 0$ fiindcă are două linii identice.

b) Scăzând din coloana 2 coloana 3, obţinem

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix}6-x & 0 & 2\\ 2 & 7-x & -4\\ 2 & x-7 & 3-x\end{vmatrix}=(7-x)\begin{vmatrix}6-x & 0 & 2\\ 2 & 1 & -4\\ 2 & -1 & 3-x\end{vmatrix}=(7-x)(x-7)(x+2)$$ $\Delta(x)=0 \Leftrightarrow x\in\{7,-2\}$.

II. 1) a) f este funcţie elementară, deci derivabilă pe D=**R**-{1}.

$$f'(x)=\frac{(6x-6)(x-1)^2-2(x-1)(3x^2-6x+5)}{(x-1)^4}=\frac{-4}{(x-1)^3}.$$

Pentru x<1, avem f'(x)>0, deci f este strict crescătoare pe (-∞,1)

Pentru x>1, avem f'(x)<0, deci f este strict descrescătoare pe (1,∞), deci f nu are puncte de extrem.

b) f' este derivabilă (fiind funcţie elementară)

$f''(x)=\frac{12}{(x-1)^4}>0, \forall x\in R-\{1\}$ ⇒ f este convexă pe (-∞,1) şi pe (1,∞).

2) $S_n=b_1\frac{1-q^n}{1-q}$ suma primilor termeni ai unei progresii geometrice cu primul

termen $b_1=1$, iar raţia q=$\frac{1}{3}\neq 1$, la numărător şi q=$\frac{1}{2}\neq 1$ la numitor.

Obţinem: $a_n=\dfrac{\frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]}{2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]}$; $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$ şi avem: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{4}$. **3)**

$$I=\int_1^e x\ln x\,dx-\int_1^e x\,dx=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x\,dx-\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^e=\left.\frac{x^2}{2}\ln x\right|_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx-$$
$$-\frac{e^2-1}{2}=\frac{e^2}{2}-\left.\frac{x^2}{4}\right|_1^e-\frac{e^2-1}{2}=\frac{3-e^2}{4}.$$

III. a) $2\cdot(-1)+3\cdot 2-5=-1\neq 0$ ⇒ A nu aparţine dreptei d.

b) d_1: $y-y_A=m(x-x_A)$ ⇒ $y-2=2(x+1)$ ⇒ d_1: $2x-y+4=0$.