Soluţii

Sesiunea iunie-iulie 1999

6. Profilul uman – proba f

Varianta nr.4

I. 1) a) Condiţii de existenţă: $x+1\neq 0$ şi $x^2-x+1\neq 0 \Rightarrow x\neq -1$.

Înmulţind ecuaţia cu x^3+1, obţinem: $x^2-x+1-2x-2=1-2x \Leftrightarrow x^2-x-2=0$ cu soluţiile $x_1=-1$, $x_2=2 \Rightarrow S=\{2\}$.

b) Notând $\left(\frac{3}{5}\right)^x = t$, ecuaţia devine $3t^2-6t+3=0 \Leftrightarrow 3(x-1)^2=0 \Rightarrow t=1$. Revenim la x şi avem: $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^0 \Rightarrow x=0$.

2) a) $\frac{C_n^3}{C_n^2} = 4, (n \in N, n \geq 3) \Leftrightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!} = 4 \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!} \Big| \cdot \frac{3!(n-2)!}{n!} \Rightarrow n-2=12 \Rightarrow n=14\in \mathbf{N}$.

b) Termenul general $T_{k+1} = C_{14}^k \left(\sqrt[13]{a}\right)^{14-k}\left(a\sqrt{a}\right)^k = C_{14}^k \cdot a^{\frac{14-k}{13}+\frac{3}{2}k}$

T_{k+1} nu-l conţine pe a $\Leftrightarrow \frac{14-k}{13} + \frac{3k}{2} = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{28}{37} \notin N \Rightarrow$ nu există nici un termen care să nu-l conţină pe a.

3) comutativitatea: $x*y=y*x$, $\forall x,y\in \mathbf{R} \Leftrightarrow xy-x-y+2=yx-y-x+2$ "A" (1)

asociativitatea: $x*(y*z)=(xy-x-y+2)*z=xyz-xy-xz-yz+x+y+z$

$(x*y)*z=x*(yz-y-z+2)=xyz-xy-xz-yz+x+y+z$

deci $x*(y*z)= (x*y)*z$, $\forall x,y,z\in \mathbf{R} \Rightarrow$ "*" este asociativă

element neutru: $\exists e\in \mathbf{R}$ astfel încât $x*e=e*x=x$, $\forall x\in \mathbf{R}$

$x*e=x \Rightarrow xe-x-e+2=x \Rightarrow e(x-1)=2(x-1) \Rightarrow e=2\in \mathbf{R}$ este element neutru;

elemente simetrizabile: $\forall x\in \mathbf{R}$, $\exists x'\in \mathbf{R}$ astfel încât $x*x'=x'*x=e$

$x*x'=2 \Leftrightarrow xx'-x-x'+2=2 \Rightarrow x' = \frac{x}{x-1} \in R$, dacă x diferit de 1.

II. 1) a) f fiind funcţie elementară este derivabilă pe $D=\mathbf{R}-\{1\}$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)^2 - 2(x-1)(2x-1)}{(x-1)^4} = \frac{-2x}{(x-1)^3}$$

x	$-\infty$		0		1		∞
$-2x$	+	+	0	-	-	-	-
$(x-1)^3$	-	-	-	-	0	+	+
$f'(x)$	-	-	0	+		-	-
$f(x)$	↘	↘	-1	↗	↗ |	↘	↘

Deci f este strict descrescătoare pe (-∞,0]şi pe (1,∞), iar pe (0,1) este strict crescătoare; x=0 este punct de minim.

b) $f''(x)=\dfrac{4x+2}{(x-1)^4}$ f''(x)=0 ⇒ 4x+2=0 ⇒ $x=-\dfrac{1}{2}$

x	-∞		$-\frac{1}{2}$		1		∞
f''(x)	-	-	0	+	/	+	+
f(x)			$-\frac{8}{9}$		/		

f este convexă pe $\left(-\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,\infty)$ şi concavă pe $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$, $x=-\dfrac{1}{2}$ este punct de inflexiune.

2) $f'(x)=\dfrac{a}{x}$ şi f'(1)=2 ⇔ a=2.

$$I=\int_1^e(2\ln x+b)dx=2\int_1^e\ln x dx+\int_1^e b dx=2\int_1^e(x)'\ln x dx+bx\Big|_1^e=$$
$$=2x\ln x\Big|_1^e+2+b(e-1)=2+b(e-1)$$

I=7 ⇒ b(e-1)=5 ⇒ $b=\dfrac{5}{e-1}$.

III. a) $AB:\dfrac{x-1}{-5}=\dfrac{y-6}{-5}\Rightarrow x-y+5=0$

9+2+5=16≠0 ⇒ $C\notin AB$.

b) $AB=\sqrt{(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2};\ BC=\sqrt{178};\ AC=\sqrt{128}$

$AB^2+AC^2=BC^2$ ⇒ ΔABC dreptunghic în A.

C: $(x-x_B)^2+(y-y_B)^2=AB^2$ ⇒ $x^2+y^2+8x-2y-33=0$.