Examenul de bacalaureat 2011
Proba E. c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 10
Filiera teoretică, profilul real, specializarea stiinŃele naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați $\log_7\left(3+\sqrt{2}\right)+\log_7\left(3-\sqrt{2}\right)$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax+b$. Determinați numerele reale a și b pentru care graficul funcției f conține punctele $A(2,3)$ și $B(-1,0)$.
5p	**3.** Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $3^x+3^{x+1}=36$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea $\{10,11,12,\ldots,99\}$, acesta să fie divizibil cu 4.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,-1)$ și $N(-1,3)$. Determinați coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$.
5p	**6.** Determinați lungimea laturii unui triunghi echilateral, care are aria egală cu $4\sqrt{3}$.

Rezolvare:

1. $\log_7\left(3+\sqrt{2}\right)+\log_7\left(3-\sqrt{2}\right)\overset{\log_a A+\log_a B=\log_a(A\cdot B)}{=}\log_7\left(3+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)=\log_7\left(3^2-\sqrt{2}^2\right)=$
$=\log_7(9-2)=\log_7 7=1.$

2. $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=x^2+ax+b$

$$\begin{cases}A(2,3)\in G_f\Rightarrow f(2)=3\Rightarrow 2^2+2a+b=3\\ B(-1,0)\in G_f\Rightarrow f(-1)=0\Rightarrow(-1)^2-a+b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a+b=-1\\ -a+b=-1\,\big|\cdot(-1)\end{cases}\Rightarrow$$

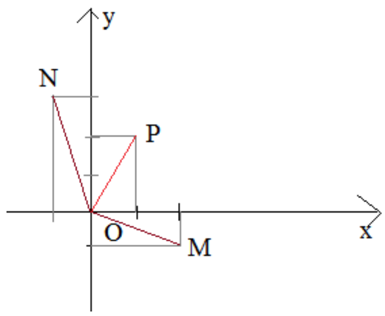
$$\begin{cases}2a+b=-1\\ a-b=1\end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow}3a=0\Rightarrow a=\frac{0}{3}=0\overset{\substack{\text{inlocuim in}\\ \text{prima ecuatie}}}{\Rightarrow}0+b=-1\Rightarrow b=-1\Rightarrow S=\begin{cases}a=0\\ b=-1\end{cases}$$

3. $3^x+3^{x+1}=36\Leftrightarrow 3^x+3^x\cdot 3^1=36\overset{\text{factor comun}}{\Leftrightarrow}3^x(1+3)=36\Leftrightarrow 4\cdot 3^x=36\,\big|:4\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3^x=9\Leftrightarrow 3^x=3^2\Leftrightarrow x=2\Rightarrow S=\{2\}$

4. Probabilitatea $p=\dfrac{\text{numarul cazurilor favorabile}}{\text{numarul cazurilor posibile}}$. Din mul { 2,…99}
numerele divizibile cu 4 încep de la 12 u
36, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, 72, 76, 80, 84, 88, 92, 96, în total 22 cazuri favorabile.

Cazuri posibile sunt: $99-9=90\Rightarrow p=\dfrac{22^{(2}}{90}=\dfrac{11}{45}$

5. Fie vectorii $\overline{u}(x_1,y_1)$ şi $\overline{v}(x_2,y_2)$, atunci vectorul sumă are coordonatele $\overline{u}+\overline{v}(x_1+x_2,y_1+y_2)$. Vom obţine:
$\overline{OM}+\overline{ON}(2-1,-1+3)\Rightarrow\overline{OM}+\overline{ON}(1,2)$



SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră punctele $A_n\left(2^n, 3^n\right)$, unde $n \in \mathbb{N}$.

5p **a)** Scrieți ecuația dreptei A_0A_1.

5p **b)** Demonstrați că punctele A_1, A_2, A_3 nu sunt coliniare.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care aria triunghiului $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ este egală cu 216.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = \frac{1}{2}(xy - x - y + 3)$.

5p **a)** Verificați dacă elementul neutru al legii „$\circ$” este $e = 3$.

5p **b)** Determinați simetricul elementului 2 în raport cu legea „$\circ$”.

5p **c)** Arătați că mulțimea $H = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.

Rezolvare:

1. a) Ecuaţia dreptei determinată de două puncte disctincte este $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ este:

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, sau ecuaţia cu ajutorul determinanţilor: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Punctele date sunt $A_0(2^0,3^0)=A_0(1,1)$ şi $A_1(2^1,3^1)=A_1(2,3)$. Atunci ecuţia dreptei $A_0\,A_1$ va fi:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{3-1} \Leftrightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} \Leftrightarrow 2x-2 = y-1 \Leftrightarrow 2x-y-1=0 \Leftrightarrow y = 2x-1.$$

b) Trei puncte sunt coliniare dacă $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Punctele date sunt $A_1(2,3)$, $A_2(2^2,3_2)$, $A_3(2^3,3^3)$. Calculăm determinantul:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2^2 & 3^2 & 1 \\ 2^3 & 3^3 & 1 \end{vmatrix} \overset{Vandermonde}{=} (1-3)(1-2)(3-2) = (-2)\cdot(-1)\cdot 1 = 2 \neq 0$$ şi atunci punctele u sunt coliniare.

c) Aria triunghiului este $S = \frac{1}{2}|\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_n & y_n & 1 \\ x_{n+1} & y_{n+2} & 1 \\ x_{n+2} & y_{n+2} & 1 \end{vmatrix}$. Înlocuim pentru punctele $A_n(2^n,3^n)$, $A_{n+1}(2^{n+1},3^{n+1})$, $A_{n+2}(2^{n+2},3^{n+2})$ şi se obţine:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2^n & 3^n & 1 \\ 2^{n+1} & 3^{n+1} & 1 \\ 2^{n+2} & 3^{n+2} & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{factor\ 2^n \\ factor\ 3^n}}{=} 2^n \cdot 3^n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2^2 & 3^2 & 1 \end{vmatrix} \overset{Vandermonde}{=} 6^n (1-2)(1-3)(3-2) = 2\cdot 6^n.$$ Atunci aria triunghiului va fi $S = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \cdot 6^n\wedge = 6^n$.

2. a) Element neutru: $\exists e \in \mathbf{R}\ astfel\ încât\ x \circ e = e \circ x = x, \forall x \in \mathbf{R}$.

Verificăm pentru elementul 3: $x \circ 3 = \frac{1}{2}\left(x\cdot 3 - x \cancel{-3} \cancel{+3}\right) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}x = x$ şi

$3 \circ x = \frac{1}{2}\left(3x \cancel{-3} - x \cancel{+} 3\right) = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}x = x$, atunci $x \circ 3 = 3 \circ x = x$ şi 3 este element neutru.

b) Element simetric: $x \in \mathbf{R}, \exists x' \in \mathbf{R}\ astfel\ încât\ x \circ x' = x' \circ x = e$, unde x' este simetricul lui $x \in \mathbf{R}$. Determinăm 2' simetricul lui 2:

$$2 \circ 2' = \frac{1}{2}(2\cdot 2' - 2 - 2' + 3) = \frac{1}{2}(2'+1) \Rightarrow \frac{1}{2}(2'+1) = 3 \Big| \cdot 2 \Rightarrow 2'+1 = 6 \Rightarrow 2' = 5 \in \mathbf{R}.$$

c) Parte stabilă: *H* este parte stabilă a lui **R**, dacă $\forall x,y\in H \Rightarrow x\circ y\in H$. Fie

$$\left.\begin{array}{l} x\in H\Rightarrow x=2k+1, k\in\mathbf{Z} \\ y\in H\Rightarrow p=2p+1, p\in\mathbf{Z}\end{array}\right\}\Rightarrow x\circ y=\frac{1}{2}\left((2k+1)(2p+1)-(2k+1)-(2p+1)+3\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(4kp\cancel{+2k}\cancel{+2p}\cancel{+1}\cancel{-2k}\cancel{-1}\cancel{-2p}-1+3\right)=\frac{1}{2}(4kp+2)=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\cdot(2kp+1)=2kp+1\in H.$$

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x+e^x$.

5p **a)** Arătați că $xf'(x)=1+xe^x$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1,e)$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3x^2+2x+1$.

5p **a)** Calculați aria suprafeței cuprinse între graficul funcției *f*, axa *Ox* și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

5p **b)** Arătați că orice primitivă a funcției f este concavă pe intervalul $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$.

5p **c)** Demonstrați că, oricare ar fi $a\geq 2$, are loc inegalitatea $\int_0^a f(x)dx\geq 3a^2+2$.

Rezolvare:

1. a) Calculăm derivata funcției *f*: $f'(x)=(\ln x)'+(e^x)'=\frac{1}{x}+e^x$ și atunci

$$x\cdot f'(x)=x\cdot\left(\frac{1}{x}+e^x\right)=1+xe^x \text{ pentru orice } x\in(0,+\infty).$$

b) Ecuația tangentei la graficul funcției în punctul $A(x_0,y_0)\in G_f$ este $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$, unde $y_0=f(x_0)$. Calculăm

$f(x_0)=f(1)=\ln 1+e^1=0+e=e\Rightarrow A\in G_f$ și $f'(x_0)=f'(1)=\frac{1}{1}+e^1=1+e$. Obținem:

$y-e=(1+e)(x-1)\Rightarrow y=(1+e)x-1\cancel{-e}\cancel{+e}\Rightarrow y=(1+e)x-1$ ecuația tangentei.

c) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x+e^x}{x}=\frac{\infty}{\infty}\overset{\text{Regula lui L'H}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x+e^x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+e^x}{1}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+e^x\right)=+\infty.$$

2. a) Aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției *f*, axa *Ox*, dreptele $x=a$ și $x=b$ este

$A(\Gamma_f)=\int_a^b|f(x)|dx$. Funcția este pozitiv definită și atunci

$$A(\Gamma_f)=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(3x^2+2x+1)dx=3\int_0^1x^2dx+2\int_0^1xdx+\int_0^1 1dx=\cancel{3}\cdot\frac{x^3}{\cancel{3}}\bigg|_0^1+\cancel{2}\cdot\frac{x^2}{\cancel{2}}\bigg|_0^1+x\big|_0^1=$$

$$=x^3\big|_0^1+x^2\big|_0^1+x\big|_0^1=1^3-0^3+1^2-0^2+1-0=3.$$

b) O primitivă a funcției *f* este $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, astfel încât $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in\mathbf{R}$. Pentru a determina convexitatea sau concavitatea unei funcții calculăm derivata de ordinul doi a funcției.

$F''(x)=f'(x)=(3x^2+2x+1)'=6x+2$, $F''(x)=0\Rightarrow 6x+2=0\Rightarrow 6x=-2\Rightarrow x=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$.

Tabelul de semn

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
$F''(x)$		− − − − − − − − − − − − − −	0	+ + + + + + + + + + + + + +	

Pe intervalul $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$, $F''(x)<0 \Rightarrow F$ este concavă pe interval.

c) $\int_0^a f(x)dx=\int_0^a\left(3x^2+2x+1\right)dx=3\int_0^a x^2dx+2\int_0^a xdx+\int_0^a 1dx=\cancel{3}\cdot\left.\frac{x^3}{\cancel{3}}\right|_0^a+\cancel{2}\cdot\left.\frac{x^2}{\cancel{2}}\right|_0^a+\left.x\right|_0^a=$

$=\left.x^3\right|_0^a+\left.x^2\right|_0^a+\left.x\right|_0^a=a^3+a^2+a$. Comparăm a^3+a^2+a cu $3a^2+2$ făcând diferenţa între ele:

$a^3+a^2+a-\left(3a^2+2\right)=a^3-2a^2+a-2=a^2(a-2)+(a-2)=(a-2)\underbrace{\left(a^2+1\right)}_{>0,\forall a\in\mathbf{R}}$.

Din $a\ge 2\Rightarrow a-2\ge 0\Rightarrow a^3+a^2+a-\left(3a^2+2\right)\ge 0\Rightarrow\int_0^a f(x)dx\ge 3a^2+2,\ \forall a\ge 2$.