

Examenul de bacalaureat național 2017

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

СУБЪЕКАТ I

(30 бодова)

- 56 1. Докажите да $\frac{2+i}{2-i} + \frac{2-i}{2+i} = \frac{6}{5}$, где $i^2 = -1$.
- 56 2. Сматрају се x_1 и x_2 солуције система $x^2 - (2m+3)x + m^2 + 3m + 2 = 0$. Докажите да $(x_1 - x_2)^2 = 1$, за било који реалан број m .
- 56 3. Решите у скупу реалних бројева једначину $\sqrt{x-3} = 5-x$.
- 56 4. Одредите колико природних троцифрених бројева са различитим цифара могу се стварати само са парних цифара.
- 56 5. Сматра се троугао ABC и тачке M , N и P , средине страница AB , BC , односно AC . Докажите да $\overline{BM} + \overline{BN} = \overline{BP}$.
- 56 6. Одредите реалне бројеве x , знајући да $\sin 2x = \cos x$ и $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

СУБЪЕКАТ II

(30 бодова)

1. Сматра се матрица $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 3 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$ и систем једначина $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + ay + 3z = 2 \\ x + 3y + az = 2 \end{cases}$, где a реалан број.
- 56 а) Докажите да $\det(A(a)) = (a+1)(a-3)$, за било који реалан број a .
- 56 б) Одредите реалне бројеве x тако да $A(x)A(2-x) = A(2-x)A(x)$.
- 56 в) Одредите целе бројеве a тако да систем има једнствену солуцију (x_0, y_0, z_0) , а x_0 , y_0 и z_0 су целе бројеве.
2. На скупу реалних бројева дефинише се закон слагања $x * y = -5xy + 10x + 10y - 18$.
- 56 а) Докажите да $x * y = 2 - 5(x-2)(y-2)$, за било које реалне бројеве x и y .
- 56 б) Одредите природне бројеве n , знајући да $(n * n) * n = n$.
- 56 в) Докажите да, ако $a * a = b$ и $b * b = a$, онда $a = b = 2$ или $a = b = \frac{9}{5}$.

СУБЪЕКАТ III

(30 бодова)

1. Сматра се функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$.
- 56 а) Одредите интервале монотоније функције f .
- 56 б) Докажите да $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^{2x} = \frac{1}{e^2}$.
- 56 в) Докажите да за било који реалан број a , $a \in (-\sqrt{2}, -1)$, једначина $f(x) = a$ има тачно две различите реалне солуције.

2. Сматра се функција $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ и, за сваки природни ненулта број n ,

сматра се број $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$.

56 a) Докажите да $\int_0^1 f(x) dx = 2(\sqrt{2} - 1)$.

56 b) Докажите да $I_n \leq \frac{1}{n+1}$, за било који природни ненулта број n .

56 c) Докажите да $(2n+1)I_n = 2\sqrt{2} - 2nI_{n-1}$, за било који природни број n , $n \geq 2$.