Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. THEMA (30 Punkte)

5p	**1.** Berechne die Summe der ganzen Zahlen aus dem Intervall $(-5, 5)$.
5p	**2.** Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$. Berechne $(f\circ f)(1)$.
5p	**3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $\sqrt{x+3}=x-3$.
5p	**4.** Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus der Menge $A=\{1, 2, 3,\ldots, 100\}$ gewählte Zahl ein Vielfaches von 11 ist.
5p	**5.** Im kartesischen Bezugssystem xOy seien die Punkte $M(2,2)$ und $N(4,2)$. Bestimme die Koordinaten des Punktes P, der auf der Ox-Achse so liegt, dass $PM=PN$.
5p	**6.** Berechne die Länge des Radius des Umkreises des Dreiecks ABC, in dem $AB=6\sqrt{2}$ und $C=\frac{\pi}{4}$.

II. THEMA (30 Punkte)

	1. Gegeben ist die Matrix $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2^x & 4^x\\ 1 & x & 2x\end{pmatrix}$, wo x eine reelle Zahl ist.
5p	**a)** Zeige, dass $\det(A(1))=1$.
5p	**b)** Beweise, dass $\det(A(x))=(2^x-1)(2^x+x-x\cdot 2^x)$, für jede reelle Zahl x.
5p	**c)** Zeige, dass $A(1)+A(2)+A(3)+\ldots+A(2017)=\begin{pmatrix}2017 & 2017 & 2017\\ 2017 & 2(2^{2017}-1) & \frac{4}{3}(4^{2017}-1)\\ 2017 & 2017\cdot 1009 & 2017\cdot 2018\end{pmatrix}$.
	2. Auf der Menge der reellen Zahlen definiert man die assoziative Verknüpfung $x*y=7xy+7x+7y+6$.
5p	**a)** Zeige, dass $x*y=7(x+1)(y+1)-1$, für alle reellen Zahlen x und y.
5p	**b)** Bestimme die reellen Zahlen x, für die $x*x*x=x$.
5p	**c)** Beweise, dass wenn für die natürlichen Zahlen a, b und c die Beziehung $a*b*c=48$ gilt, dann sind die Zahlen a, b und c gleich.

III. THEMA (30 Punkte)

	1. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-3}{e^x}$.
5p	**a)** Zeige, dass $f'(x)=\frac{-x^2+2x+3}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Bestimme die Gleichung der Tangenten an den Grafen der Funktion f, im Punkt des Schaubildes von f mit der Abszisse $x=-1$.
5p	**c)** Beweise, dass $-2e\le f(x)\le\frac{6}{e^3}$, für alle $x\in[-1,+\infty)$.

2. Gegeben ist die Funktion $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}$.

5p **a)** Zeige, dass $\int_1^2 \dfrac{x+1}{\sqrt{x}} f(x)\,dx=\ln\dfrac{3}{2}$.

5p **b)** Beweise, dass jede Stammfunktion der Funktion f streng steigend ist auf dem Intervall $(0,+\infty)$.

5p **c)** Bestimme die reelle Zahl m, $m>0$ so, dass der Flächeninhalt der Menge begrenzt von dem Grafen der Funktion $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{x}(x+1)f(x)$, der Ox-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x=1$ und $x=2$ gleich $1-\ln\dfrac{m+1}{m}$ ist.