

Examenul de bacalaureat național 2017

Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Számítsd ki a $(-5, 5)$ intervallumban lévő egész számok összegét!
- 5p 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 1$ függvény. Számítsd ki az $(f \circ f)(1)$ értéket!
- 5p 3. Oldd meg a $\sqrt{x+3} = x-3$ egyenletet a valós számok halmazán!
- 5p 4. Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy az $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ halmaz véletlenszerűen kiválasztott eleme a 11-nek többszöröse legyen!
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $M(2,2)$ és $N(4,2)$ pontok. Határozd meg a P pont koordinátáit, tudva, hogy rajta van az Ox tengelyen és $PM = PN$.
- 5p 6. Az ABC háromszögben $AB = 6\sqrt{2}$ és $C = \frac{\pi}{4}$. Számítsd ki a háromszög köré írt kör sugarának hosszát!

II. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2^x & 4^x \\ 1 & x & 2x \end{pmatrix}$ mátrix, ahol x valós szám.
- 5p a) Igazold, hogy $\det(A(1)) = 1$.
- 5p b) Igazold, hogy $\det(A(x)) = (2^x - 1)(2^x + x - x \cdot 2^x)$, bármely x valós szám esetén!
- 5p c) Igazold, hogy $A(1) + A(2) + A(3) + \dots + A(2017) = \begin{pmatrix} 2017 & 2017 & 2017 \\ 2017 & 2(2^{2017} - 1) & \frac{4}{3}(4^{2017} - 1) \\ 2017 & 2017 \cdot 1009 & 2017 \cdot 2018 \end{pmatrix}$.
2. Adott a valós számok halmazán értelmezett $x * y = 7xy + 7x + 7y + 6$ asszociatív művelet.
- 5p a) Igazold, hogy $x * y = 7(x+1)(y+1) - 1$, bármely x és y valós számok esetén!
- 5p b) Határozd meg azokat az x valós számokat, amelyekre $x * x * x = x$.
- 5p c) Igazold, hogy ha a , b és c olyan természetes számok, amelyekre $a * b * c = 48$, akkor az a , b és c számok egyenlők!

III. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 3}{e^x}$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 3}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képének $x = -1$ abszcisszájú pontjában az f függvény grafikus képéhez húzott érintő egyenletét!
- 5p c) Igazold, hogy $-2e \leq f(x) \leq \frac{6}{e^3}$, bármely $x \in [-1, +\infty)$ esetén.

2. Adott az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $\int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{x}} f(x) dx = \ln \frac{3}{2}$.

5p b) Igazold, hogy az f függvény minden primitív függvénye szigorúan növekvő a $(0, +\infty)$ intervallumon!

5p c) Határozd meg az m , $m > 0$ valós számot, ha a $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}(x+1)f(x)$ függvény grafikus képe, az Ox tengely, valamint az $x=1$ és $x=2$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területe $1 - \ln \frac{m+1}{m}$.