Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

ZADANIE I. (30 bodov)

5b **1.** Určte komplexné číslo z, vediac, že $2\overline{z}-z=1-3i$, kde $\overline{z}$ je združené číslo pre z.

5b **2.** Majme funkciu $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+1$, kde m je reálne číslo. Určte reálne čísla m, vediac, že vrchol paraboly prislúchajúcej funkcii f sa nachádza na osi Ox.

5b **3.** Na množine reálnych čísel riešte rovnicu $\frac{\lg x}{\lg(x+2)}=\frac{1}{2}$.

5b **4.** Vypočítajte pravdepodobnosť výberu jedného čísla z množiny dvojciferných prirodzených čísel, tak, aby ono malo rôzne číslice a aby číslice boli nepárne.

5b **5.** V kartézskej súradnicovej sústave xOy majme bod $A(-5,2)$ a priamku d s rovnicou $y=x+1$. Určte rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom A a je kolmá na priamku d.

5b **6.** Ukážte, že $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0$, pre hociktoré reálne číslo x.

ZADANIE II. (30 bodov)

1. Majme maticu $M(m)=\begin{pmatrix}2m & 1 & 1\\ 1 & 2m & 1\\ 1 & 1 & 2m\end{pmatrix}$ a sústavu rovníc $\begin{cases}2mx+y+z=-1\\ x+2my+z=0\\ x+y+2mz=1\end{cases}$, kde m je reálne číslo.

5b **a)** Ukážte, že $\det(M(0))=2$.

5b **b)** Určte reálne čísla m, keď $\det(M(m))=0$.

5b **c)** Pre $m=-1$, dokážte, že ak (a,b,c) je jedno riešenie sústavy, najviac jedno spomedzi čísel a, b i c je celé číslo.

2. Na množine reálnych čísel je definovaný asociatívny zákon kompozície $x*y=4xy+3x+3y+\frac{3}{2}$.

5b **a)** Dokážte, že $x*y=4\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(y+\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{4}$, pre hociktoré reálne čísla x a y.

5b **b)** Určte reálne číslo x, pre ktoré $x*x*x=-\frac{1}{2}$.

5b **c)** Určte reálne čísla a, vediac, že $f(x)*f(y)=f(x+y)$, pre hociktoré reálne čísla x i y, kde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ae^x-\frac{3}{4}$.

ZADANIE III. (30 bodov)

1. Majme funkciu $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=8x^2-\ln x$.

5b **a)** Ukážte, že $f'(x)=\frac{(4x-1)(4x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5b **b)** Dokážte, že bod $A\left(\frac{2}{3},3\right)$ leží na dotyčnici ku grafu funkcie f v bode, ktorého x-ova súradnica je $x=1$ a ktorý sa nachádza na grafe funkcie f.

5b **c)** Dokážte, že $f\left(\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)<f\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. Majme funkciu $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+3}$.

5b **a)** Ukážte, že $\int_0^1 (x+3)f(x)\,dx=4$.

5b **b)** Ukážte, že $\int_0^1 f(x)\,dx=2-3\ln\dfrac{4}{3}$.

5b **c)** Pre každé prirodzené číslo n, majme číslo $I_n=\int_0^1 e^x(x+3)^n\left(f(x)\right)^n dx$. Dokážte, že $I_n+2nI_{n-1}=e\cdot 5^n-3^n$, pre hociktoré prirodzené číslo n, $n\geq 1$.