

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică *M\_mate-info*

Varianta 9

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

ZADANIE I.

(30 bodov)

- 5b 1. Ukážete, že číslo  $n = |1 - \sqrt{2}| + |2 - \sqrt{2}|$  je prirodzené.
- 5b 2. Majme funkcie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 11 - x$  a  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 1 - 11x$ . Na množine reálnych čísel vyriešte nerovnicu  $f(x) \geq g(x)$ .
- 5b 3. Na množine reálnych čísel vyriešte rovnicu  $3^x \cdot 2^{x+1} = 72$ .
- 5b 4. Určte koľko trojčiferných prirodzených čísel pozostávajúcich z rôznych číslic je možné vytvoriť len s nepárnymi číslicami.
- 5b 5. V kartézskej súradnicovej sústave  $xOy$  sú dané body  $A(-3,3)$ ,  $B(1,3)$  i  $C(1,5)$ . Vypočítajte obsah trojuholníka  $ABC$ .
- 5b 6. Vypočítajte dĺžku polomeru kružnice opísanej  $\triangle ABC$ , viediac že  $BC = 4$ ,  $B = \frac{\pi}{3}$  i  $C = \frac{\pi}{6}$ .

ZADANIE II.

(30 bodov)

1. Je daná matica  $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x-2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{x-2} \end{pmatrix}$ , kde  $x$  je reálne číslo.
- 5b a) Ukážete, že  $\det(A(2)) = 1$ .
- 5b b) Dokážete, že  $A(x)A(y) = A(x+y-2)$ , pre hociktoré reálne čísla  $x$  a  $y$ .
- 5b c) Určte reálne čísla  $m$ , pre ktoré  $A(1)A(2)A(3) \cdot \dots \cdot A(10) = A(m^2 + m + 17)$ .
2. Majme polynóm  $f = X^3 - 4X^2 + 5X + a$ , kde  $a$  je reálne číslo.
- 5b a) Ukážete, že  $f(1) - f(-1) = 12$ .
- 5b b) Určte reálne číslo  $a$ , viediac že polynóm  $f$  je deliteľný polynómom  $X - 2$ .
- 5b c) Určte reálne číslo  $a$ , viediac že všetky korene polynómu  $f$  sú celé čísla.

ZADANIE III.

(30 bodov)

1. Majme funkciu  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x$ .
- 5b a) Ukážete, že  $f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5b b) Určte  $x$ -ovu súradnicu bodu, ktorý leží na grafe funkcie  $f$  a v ktorom dotyčnica ku grafu funkcie  $f$  je kolmá na os  $Oy$ .
- 5b c) Dokážete, že  $2^{\sqrt{3}} < 3^{\sqrt{2}}$ .
2. Majme funkciu  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 4x - x^2$ .
- 5b a) Ukážete, že  $\int_0^3 f(x) dx = 9$ .

**5b** b) Ukáźte, že  $\int_1^2 \frac{2-x}{f(x)} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$ .

**5b** c) Pre každé nenulové prirodzené číslo  $n$ , majme číslo  $I_n = \int_0^4 f^n(x) dx$ . Dokáźte, že  $I_{n+1} \leq 4I_n$ , pre hociktoré nenulové prirodzené číslo  $n$ .