Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

TEIL I **(30 Punkte)**

5p **1.** Gegeben ist die komplexe Zahl $z=2+i$. Zeige, dass $z^2-4z+5=0$.

5p **2.** Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+a$, wo a eine reelle Zahl ist. Bestimme die reelle Zahl a, wenn der Punkt $M(0,2)$ zu dem Grafen der Funktion f gehört.

5p **3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $x=\sqrt[3]{x^3+2x}$.

5p **4.** Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Wahl einer fünfstelligen natürlichen Zahl mit verschiedenen Ziffern aus der Menge $\{1,2,3,4,5\}$, diese die Zehnerziffer 2 hat und die Einerziffer 3 hat.

5p **5.** Gegeben sind im kartesischen Koordinatensystem xOy die Punkte $A(0,1)$, $B(2,3)$ und $C(4,a)$, wo a eine reelle Zahl ist. Bestimme die reelle Zahl a, wenn der Punkt C auf der Mittelsenkrechten der Strecke AB liegt.

5p **6.** Die Maße der Winkel A, B und C des Dreiecks ABC sind, in dieser Reihenfolge, aufeinanderfolgende Glieder einer arithmetischen Folge. Beweise, dass das Maß des Winkels B gleich $\frac{\pi}{3}$ ist.

TEIL II **(30 Punkte)**

1. Gegeben ist die Matrix $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1+\ln x\\ 0 & x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, wo $x\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Zeige, dass $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Beweise, dass $A(x)A(y)=A(y)A(x)$, für alle $x,y\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Bestimme die natürliche Zahl n, für welche $A\left(\frac{1}{3}\right)\cdot A\left(\frac{1}{2}\right)\cdot A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)=\begin{pmatrix}1 & 0 & n\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Auf der Menge der reellen Zahlen definiert man die Verknüpfung $x*y=xy-4(x+y)+a$, wo a eine reelle Zahl ist.

5p **a)** Für $a=10$, zeige, dass $1*2=0$.

5p **b)** Für $a=20$, zeige, dass $e=5$ das neutrale Element der Verknüpfung „$*$” ist.

5p **c)** Wenn $a\in[20,+\infty)$, dann beweise, dass die Menge $H=[4,+\infty)$ ein stabiler Teil der Menge der reellen Zahlen in Bezug auf die Verknüpfung „$*$” ist.

TEIL III **(30 Punkte)**

1. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $f(x)=6^x-3^x+2^x$.

5p **a)** Zeige, dass $f'(0)=\ln 4$.

5p **b)** Gegeben ist die Tangente an den Grafen der Funktion f im Punkt der Abszisse $x=0$ des Grafen der Funktion f. Bestimme die reelle Zahl a, für welche der Punkt $A(a,\ln(16e))$ auf dieser Tangenten liegt.

5p **c)** Berechne $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(f(x)\right)}{x}$.

2. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{2x}{x^2+3}-\frac{2}{x^2+3}$.

5p **a)** Zeige, dass $\int_1^2\left(x^2+3\right)f(x)\,dx=\frac{1}{3}$.

5p **b)** Zeige, dass $\int_0^1 f(x)\,dx=1-\ln\frac{4}{3}-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

5p **c)** Für jede natürliche von null verschiedene Zahl n, wird die Zahl $I_n=\int_0^1 f^n(x)\,dx$ gegeben. Zeige, dass $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.