

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

ЗАВДАННЯ I

(30 балів)

- 56 1. Розглядають комплексне число $z = 2 + i$. Докажіть, що $z^2 - 4z + 5 = 0$.
- 56 2. Розглядають функцію $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + a$, де a - дійсне число. Визначте дійсне число a , знаючи, що точка $M(0, 2)$ належить графіку функції f .
- 56 3. У множині дійсних чисел розв'яжіть рівняння $x = \sqrt[3]{x^3 + 2x}$.
- 56 4. Обчисліть ймовірність того, що вибираючи одне число з множини натуральних чисел із п'ятьма різними числами, який складається із чисел множини $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, він буде мати цифру десятків рівну 2 і цифру одиниць рівну 3.
- 56 5. У декартовому репері xOy задають точки $A(0, 1)$, $B(2, 3)$ і $C(4, a)$, де a - дійсне число. Визначте дійсне число a , знаючи, що точка C знаходиться на медіаторі сегменту AB .
- 56 6. Величини кутів A , B і C трикутника ABC - у такому порядку, є порядковими термінами одної арифметичної прогресії. Докажіть, що величина кута B є рівною із $\frac{\pi}{3}$.

ЗАВДАННЯ II

(30 балів)

1. Розглядають матрицю $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 + \ln x \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, де $x \in (0, +\infty)$.
- 56 а) Докажіть, що $\det(A(1)) = 1$.
- 56 б) Докажіть, що $A(x)A(y) = A(y)A(x)$, для будь якого $x, y \in (0, +\infty)$.
- 56 в) Знайдіть натуральне число n для якого $A\left(\frac{1}{3}\right) \cdot A\left(\frac{1}{2}\right) \cdot A(1) \cdot A(2) \cdot A(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
2. На основі множини дійсних чисел визначається закон композиції $x * y = xy - 4(x + y) + a$, де a - дійсне число.
- 56 а) Для $a = 10$, докажіть, що $1 * 2 = 0$.
- 56 б) Для $a = 20$, докажіть, що $e = 5$ є нейтральним елементом закону композиції „*”.
- 56 в) Покажіть, що якщо $a \in [20, +\infty)$, тоді множина $H = [4, +\infty)$ є стабільною частиною множини дійсних чисел у відношенні до закону композиції „*”.

ЗАВДАННЯ III

(30 балів)

1. Розглядають функцію $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = 6^x - 3^x + 2^x$.
- 56 а) Докажіть, що $f'(0) = \ln 4$.
- 56 б) Розглядають дотичну до графіка функції f у точці абсциси $x = 0$, розміщену на графіку функції f . Знайдіть дійсне число a для якого точка $A(a, \ln(16e))$ знаходиться на цій дотичні.
- 56 в) Обчисліть $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(f(x))}{x}$.

2. Розглядають функцію $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{2x}{x^2 + 3} - \frac{2}{x^2 + 3}$.

56 a) Докажіть, що $\int_1^2 (x^2 + 3) f(x) dx = \frac{1}{3}$.

56 b) Докажіть, що $\int_0^1 f(x) dx = 1 - \ln \frac{4}{3} - \frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

56 c) Для кожного ненульового натурального числа n , розглядають число $I_n = \int_0^1 f^n(x) dx$. Докажіть, що $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.