Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

TEIL I **(30 Punkte)**

5p **1.** Zeige, dass die Zahl $z=\left(1-i\sqrt{2}\right)\left(1+i\sqrt{2}\right)$ natürlich ist, wobei $i^2=-1$.

5p **2.** Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+a$, wobei a eine reelle Zahl ist. Bestimme die reelle Zahl a, wenn $f(x)+f(1-x)=7$, für jede reelle Zahl x.

5p **3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $5^x+5^{-x}=2$.

5p **4.** Gegeben ist die Menge $A=\{1,2,3,4,5\}$. Bestimme die Anzahl der Teilmengen von drei Elementen von A, welche die 1 enthalten.

5p **5.** Sei $M(-4,4)$ ein Punkt im kartesischen Bezugssystem xOy. Bestimme die Gleichung der Geraden d, die durch den Punkt M läuft und senkrecht steht auf die Gerade OM.

5p **6.** Das Dreieck ABC ist rechtwinklig in A und $\sin B=\cos B$. Zeige, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.

TEIL II **(30 Punkte)**

1. Gegeben ist die Matrix $A(a)=\begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a^2+1 & a^2+2 & a^2+3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, wobei a eine reelle Zahl ist.

5p **a)** Zeige, dass $\det\left(A(0)\right)=-1$.

5p **b)** Beweise, dass die Matrix $A(a)$ für jede reelle Zahl a umkehrbar ist.

5p **c)** Bestimme die ganzen Zahlen a, für die alle Elemente der Inversen der Matrix $A(a)$ ganze Zahlen sind.

2. Auf der Menge $A=[1,+\infty)$ definiert man die Verknüpfung $x*y=\frac{1}{2}\sqrt[3]{x^3y^3-x^3-y^3+9}$.

5p **a)** Zeige, dass $1*2020=1$.

5p **b)** Beweise, dass $x*y=\sqrt[3]{\frac{1}{8}\left(x^3-1\right)\left(y^3-1\right)+1}$, für alle $x,y\in A$.

5p **c)** Bestimme $x\in A$, sodass $x*x=x$.

TEIL III **(30 Punkte)**

1. Gegeben ist die Funktion $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x-2}+\ln\frac{x-1}{x}$.

5p **a)** Zeige, dass $f'(x)=\frac{-3x+4}{x(x-1)(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.

5p **b)** Bestimme die Gleichung der horizontalen Asymptote gegen $+\infty$ des Grafen der Funktion f.

5p **c)** Beweise, dass $\frac{1}{x-2}>\ln\frac{x}{x-1}$, für alle $x\in(2,+\infty)$.

2. Gegeben ist die Funktion $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$.

5p **a)** Zeige, dass $\int_0^1\left(x^3+1\right)f^2(x)\,dx=\frac{1}{3}$.

5p	**b)** Zeige, dass $\int_0^1 f^2(x)\,dx = \frac{1}{3}\ln 2$.
5p	**c)** Für jede natürliche von null verschiedener Zahl n, sei die Zahl $I_n = \int_0^1 f\left(x^n\right)dx$. Beweise, dass $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.