

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Igazold, hogy a $z = (1 - i\sqrt{2})(1 + i\sqrt{2})$ természetes szám, ahol $i^2 = -1$.
- 5p 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + a$ függvény, ahol a valós szám. Határozd meg az a valós számot, ha $f(x) + f(1-x) = 7$, bármely x valós szám esetén!
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazán az $5^x + 5^{-x} = 2$ egyenletet!
- 5p 4. Adott az $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmaz. Határozd meg az A halmaznak az 1-et tartalmazó három elemű részhalmazainak a számát!
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adott az $M(-4, 4)$ pont. Határozd meg annak a d egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az M ponton és merőleges az OM egyenesre!
- 5p 6. Az A -ban derékszögű ABC háromszögben $\sin B = \cos B$. Igazold, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú!

II. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $A(a) = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a^2+1 & a^2+2 & a^2+3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix, ahol a valós szám.

- 5p a) Igazold, hogy $\det(A(0)) = -1$.
- 5p b) Bizonyítsd be, hogy az $A(a)$ mátrix invertálható, bármely a valós szám esetén!
- 5p c) Határozd meg azokat az a egész számokat, amelyekre az $A(a)$ mátrix inverzének minden eleme egész szám!
2. Az $A = [1, +\infty)$ halmazon értelmezett az $x * y = \frac{1}{2} \sqrt[3]{x^3 y^3 - x^3 - y^3 + 9}$ művelet.
- 5p a) Igazold, hogy $1 * 2020 = 1$.
- 5p b) Bizonyítsd be, hogy $x * y = \sqrt[3]{\frac{1}{8}(x^3 - 1)(y^3 - 1)} + 1$, bármely $x, y \in A$ esetén!
- 5p c) Határozd meg az $x \in A$ értéket úgy, hogy $x * x = x$.

III. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $f: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln \frac{x-1}{x}$ függvény.

- 5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{-3x+4}{x(x-1)(x-2)^2}$, $x \in (2, +\infty)$.
- 5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képe vízszintes aszimptotájának egyenletét a $+\infty$ -ben!
- 5p c) Bizonyítsd be, hogy $\frac{1}{x-2} > \ln \frac{x}{x-1}$, bármely $x \in (2, +\infty)$ esetén!
2. Adott az $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $\int_0^1 (x^3+1) f^2(x) dx = \frac{1}{3}$.

5p b) Igazold, hogy $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{3} \ln 2$.

5p c) Minden n nullától különböző természetes szám esetén adott az $I_n = \int_0^1 f(x^n) dx$ szám. Bizonyítsd be, hogy $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.