

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTAT I

(30 bодова)

- 56 1. Докажите да $(1+i)^2 - 2(1+i) + 2 = 0$, где $i^2 = -1$.
- 56 2. Сматра се функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + ax - 5$, где a јесте реалан број. Одредите реалан број a , знајући да тачка $M(1,2)$ припада графику функције f .
- 56 3. Решите у скупу реалних бројева једначину $\log_4(x^2 + 1) = \log_4 x + \log_4(x + 1)$.
- 56 4. Израчунајте вероватноћу да, бирајући један број из скупа двоцифрених природних бројева, овај да буде дељив са 2 и са 5.
- 56 5. У картезианском систему xOy сматрају се тачке $M(3,4)$, $N(0,1)$ и $P(3,0)$. Одредите једначину праве d која садржи тачку P и је паралелна са правом MN .
- 56 6. Сматра се троугао ABC , правоугли у C . Докажите да $\operatorname{tg} B = \frac{1}{\operatorname{tg} A}$.

SUBIECTAT II

(30 бодова)

1. Сматрају се матрице $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $A(a) = \begin{pmatrix} a+2 & 0 & -a \\ 0 & 2 & 0 \\ 3a & 0 & 2-3a \end{pmatrix}$, где a је реалан број.
- 56 а) Докажите да $\det(A(0)) = 8$.
- 56 б) Одредите матрицу $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, знајући да $aB = A(a) - 2I_3$, за било који реални број a .
- 56 в) Одредите природни број n тако да $\det(A(n) \cdot A(-n)) > 0$.
2. На скупу реалних бројева дефинише се асоцијативан закон слагања $x * y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.
- 56 а) Докажите да $2 * 0 = 2$.
- 56 б) Докажите да, ако a и b су реалне бројеве тако да $a \leq b$, онда $a * b = b$.
- 56 в) Одредите реалне бројеве x за које $(2x) * (x^2 + 1) * (-2x) = 10$.

SUBIECTAT III

(30 бодова)

1. Сматра се функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 3}$.
- 56 а) Докажите $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3} - x}{\sqrt{x^2 + 3}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 56 б) Одредите једначину хоризонталне асимптоте према $+\infty$ на графику функције f .
- 56 в) Одредите скуп реалних вредности за a тако да једначина $f(x) = a$ има решење.
2. Сматра се функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 3}$.
- 56 а) Докажите да $\int_0^2 (x^2 + x + 3) f(x) dx = 2$.

56 b) Докажіте да $\int_1^2 g(x) dx = \ln \frac{9}{5}$, где $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{2x+1}{x} \cdot f(x)$.

56 c) Смотрају се реални бројеви a и b , са $0 \leq a < b$. За сваки ненултни природни број n , сматра се број $I_n = \int_a^b f^n(x) dx$. Докажіте да $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.