Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

I. THEMA (30 Punkte)

5p **1.** Gegeben ist die geometrische Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ mit $b_2 = 2$ und $b_4 = 4$. Bestimme b_6.

5p **2.** Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + m$, wo m eine reelle Zahl ist. Bestimme die reelle Zahl m so, dass der Scheitelpunkt der Parabel, die der Funktion f zugeordnet ist, zu der Geraden $y = 3x$ gehört.

5p **3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$.

5p **4.** Bestimme die Anzahl der natürlichen dreistelligen Zahlen, die genau zwei gleiche Ziffern haben.

5p **5.** Die Strecken AB und $A'B'$ haben dieselbe Mitte. Beweise, dass $\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BA'} = \vec{0}$.

5p **6.** Beweise, dass in jedem Dreieck ABC, die Beziehung $AB + AC + BC = 2R(\sin A + \sin B + \sin C)$ gilt, wo R der Radius des Umkreises des Dreiecks ist.

II. THEMA (30 Punkte)

1. Gegeben sind das Gleichungssystem $\begin{cases} ax + (a+1)y + (a+2)z = a \\ bx + (b+1)y + (b+2)z = b \\ y + z = 1 \end{cases}$. und die Matrix $X(a,b) = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, wo a und b reelle Zahlen sind.

5p **a)** Zeige, dass $\det(X(0,1)) = 1$.

5p **b)** Beweise, dass für alle reellen verschiedenen Zahlen a und b, das Gleichungssystem eine einzige Lösung hat.

5p **c)** Beweise: wenn (x_0, y_0, z_0) Lösung des Gleichungssystems ist, dann $y_0^2 - z_0^2 - 2ax_0 = 3$, für jede reelle Zahl a.

2. Auf der Menge $M = (2, +\infty)$ definiert man die assoziative Verknüpfung $x * y = (x-1)^{\log_3(y-1)} + 1$.

5p **a)** Zeige, dass $5 * 10 = 17$.

5p **b)** Bestimme das neutrale Element der Verknüpfung „$*$”.

5p **c)** Bestimme $x \in M$ so, dass $x * x * x = x * x$.

III. THEMA (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{e^{2x} + x^4 + 2}$.

5p **a)** Zeige, dass $f'(x) = \dfrac{e^{2x} + 2x^3}{\sqrt{e^{2x} + x^4 + 2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Beweise, dass die Tangente an das Schaubild der Funktion f in dem Punkt mit der Abszisse $x = 0$, der zum Schaubild der Funktion f gehört, parallel zu der Geraden mit der Gleichung $x - \sqrt{3}y = 0$ ist.

5p **c)** Beweise, dass die Funktion f einen einzigen Extrempunkt hat.

2. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+3}\right)$.

5p **a)** Zeige, dass $\int_0^1\left(2f(x)+\frac{1}{x^2+3}\right)dx=\frac{\pi}{4}$.

5p **b)** Beweise, dass jede Stammfunktion F der Funktion f streng steigend ist.

5p **c)** Zeige, dass für alle reellen Zahlen a und b, mit $a<b$, $\int_a^b f(x)F^2(x)dx>0$, für jede Stammfunktion F der Funktion f.