Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. THEMA (30 Punkte)

5p	**1.** Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 3 + 2i$ und $z_2 = 3 - 2i$. Zeige, dass die Zahl $z_1 + z_2$ eine reelle Zahl ist.
5p	**2** Bestimme die reelle Zahl m, sodass der Punkt $M(2, m)$ zum Schaubild der Funktion $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3$ gehört.
5p	**3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $3^{3x-5} = 3^{-2}$.
5p	**4.** Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zahl aus der Menge, $A = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ ein Vielfaches von 5 ist.
5p	**5.** In dem kartesischen Koordinatensystem xOy sind die Punkte $A(2,5)$, $B(1,3)$ und $C(m,1)$ gegeben, wo m eine reelle Zahl ist. Bestimme die reelle Zahl m, sodass der Punkt C zur Geraden AB gehört.
5p	**6.** Gegeben ist $E(x) = \cos\frac{x}{2} + \sin x$, wo x eine reelle Zahl ist. Zeige, dass $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

II. THEMA (30 Punkte)

	1. Gegeben ist die Matrix $A(x) = \begin{pmatrix} x & x+1 & 1 \\ 2 & x & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, wo x eine reelle Zahl ist.
5p	**a)** Zeige, dass $\det(A(0)) = 1$.
5p	**b)** Bestimme die reelle Zahl x, sodass $A(x) + A(x+2) = 2A(2)$.
5p	**c)** In dem kartesischen Koordinatensystem xOy sind die Punkte $M(n, n+1)$, $N(2, n)$ und $P(3,0)$ gegeben. Bestimme die natürliche Zahl n, sodass die Punkte M, N und P kollinear sind.
	2. Gegeben ist das Polynom $f = X^3 + aX^2 + X - 1$, wo a eine reelle Zahl ist.
5p	**a)** Zeige, dass $f(1) - f(-1) = 4$, für jede reelle Zahl a.
5p	**b)** Für $a = 2$, berechne den Quotienten und den Rest der Division des Polynoms f durch das Polynom $X^2 + X + 1$.
5p	**c)** Bestimme die reelle Zahl a, sodass $x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x_1x_2x_3 - 1$, wo x_1, x_2 und x_3 die Wurzeln des Polynoms f sind.

III. THEMA (30 Punkte)

	1. Gegeben ist die Funktion $f:(1,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.
5p	**a)** Zeige, dass $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x \in (1,+\infty)$.
5p	**b)** Bestimme die Gleichung der Tangenten an das Schaubild der Funktion f in dem Punkt mit der Abszisse $x = 2$, der zum Schaubild der Funktion f gehört.
5p	**c)** Beweise, dass $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{e^x + 1} = 0$.
	2. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + 2x$.
5p	**a)** Zeige, dass $\int_0^1 (f(x) - 2x)\,dx = e - 1$.

5p	**b)** Bestimme das Volumen des Körpers, den man durch die Drehung des Schaubildes der Funktion $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-e^x$ um die Ox -Achse erhält.
5p	**c)** Bestimme die reelle Zahl a, sodass $\int_0^a x f(x)dx=1+\frac{2a^3}{3}$.