

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Határozd meg az $(a_n)_{n \geq 1}$ számtani haladvány első három tagjának összegét, ha $a_1 = 2$ és állandó különbsége $r = 2$.
- 5p 2. Határozd meg az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 10x + 9$ függvény grafikus képe és az Ox tengely metszéspontjainak abszcisszáit!
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazán az $5^{x+1} - 3 \cdot 5^x = 2$ egyenletet!
- 5p 4. Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy az $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ halmazból véletlenszerűen kiválasztott x szám az $x^2 - 4x + 4 = 0$ egyenlet megoldása legyen!
- 5p 5. Határozd meg az $\overline{AB} + \overline{AC}$ vektor hosszát tudva azt, hogy az ABC háromszög egyenlő oldalú és $AB = 2$.
- 5p 6. Igazold, hogy $\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin^2(x + \pi) = 1$, bármely x valós szám esetén!

II. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $A(a) = \begin{pmatrix} 1+4a & -6a \\ 2a & 1-3a \end{pmatrix}$ mátrix, ahol a valós szám.
- 5p a) Igazold, hogy $\det(A(1)) = 2$.
- 5p b) Bizonyítsd be, hogy $A(a)A(b) = A(a+b+ab)$, bármely a és b valós szám esetén!
- 5p c) Határozd meg az m és n természetes számpárokat, amelyekre $A(m)A(n) = A(2)$.
2. A valós számok halmazán értelmezett az $x \circ y = 2xy - 2x - 2y + 3$ asszociatív művelet.
- 5p a) Igazold, hogy $x \circ y = 2(x-1)(y-1) + 1$, bármely x és y valós szám esetén!
- 5p b) Határozd meg az x azon valós értékeit, amelyekre $x \circ x \leq 9$.
- 5p c) Számítsd ki $1^n \circ 2^n \circ 3^n \circ \dots \circ 2019^n$, bármely n nemnulla természetes szám esetén!

III. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln x^e$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{x-e}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képe azon pontjának abszcisszáját, amelyben az f függvény grafikus képéhez húzott érintő párhuzamos az Ox tengellyel!
- 5p c) Igazold, hogy az $e^x = x^e$ egyenletnek pontosan egy megoldása van a $(0, +\infty)$ intervallumon!
2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x+1)e^x$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $\int_0^3 \frac{f(x)}{e^x} dx = 6$.
- 5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képe, az Ox tengely valamint az $x=1$ és $x=2$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét!
- 5p c) Határozd meg az a , $a > 2$ valós számot, tudva azt, hogy $\int_2^a \frac{2xe^x}{f(x)} dx = 3 \ln 2$.