

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Testul 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Igazolja, hogy $(2 - \lg 40) \cdot \frac{1}{\lg^2 5 - \lg^2 2} = 1$.
- 5p 2. Határozza meg az m azon valós értékeit, amelyekre a $2x - m^2 + 1 = 0$ egyenlet megoldása egy 0-nál szigorúan kisebb valós szám!
- 5p 3. Oldja meg a valós számok halmazában a $2^{x^2+x} = 4^{2x}$ egyenletet!
- 5p 4. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy véletlenszerűen kiválasztva egy n számot az egyjegyű természetes számok halmazából, az teljesítse az $(n+1)! - n! \leq n+2$ egyenlőtlenséget!
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(-6, 6)$ és $B(0, 2)$ pontok. Határozza meg a C pont koordinátáit, ha $\overline{AO} = 2\overline{BC}$.
- 5p 6. Határozza meg az a , $a > -2$ valós számokat, ha $a^2 + 1$ és $a + 2$ egy derékszögű háromszög átfogójának, illetve a háromszög köré írt kör sugarának hossza!

II. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{a} \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix, ahol $a \in (0, +\infty)$.
- 5p a) Igazolja, hogy $\det(A(4)) = 1$.
- 5p b) Igazolja, hogy $\det(A(a) \cdot A(1) - A(a+1)) > 0$, bármely $a \in (0, +\infty)$ esetén!
- 5p c) Igazolja, hogy a $B(n) = A(1^2) + A(2^2) + A(3^2) + \dots + A(n^2)$ mátrix invertálható bármely n , $n \geq 2$ természetes szám esetén!
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x \circ y = \sqrt{3}(xy + 4) - 3(x + y)$ asszociatív műveletet.
- 5p a) Igazolja, hogy $\sqrt{3} \circ 2 = \sqrt{3}$.
- 5p b) Igazolja, hogy $x \circ y = \sqrt{3}(x - \sqrt{3})(y - \sqrt{3}) + \sqrt{3}$, bármely x és y valós számok esetén!
- 5p c) Számítsa ki a $3^1 \circ 3^{\frac{1}{2}} \circ 3^{\frac{1}{3}} \circ \dots \circ 3^{\frac{1}{2021}}$ értéket!

III. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - \arctg x, & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{5x}{x^2 + x + 4}, & x \in [0, +\infty) \end{cases}$ függvény.
- 5p a) Igazolja, hogy az f függvény folytonos \mathbb{R} -en!
- 5p b) Bizonyítsa be, hogy az f függvény növekvő a $(-\infty, 0)$ intervallumon!
- 5p c) Igazolja, hogy $f(x) \leq 1$ bármely x valós szám esetén!

2. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x}$ függvény.

5p a) Igazolja, hogy $\int_1^5 x(x+2)f(x)dx = 16$.

5p b) Számítsa ki az $\int_1^3 f(x)dx$ értéket!

5p c) Bizonyítsa be, hogy az f függvény bármely F primitívje konkáv függvény!