

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică M_șt-nat

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p** 1. Határozza meg a $(b_n)_{n \geq 1}$ mértani haladvány harmadik tagját, ha $b_1 = 2$ és $b_2 = 6$.
- 5p** 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 7$ és a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x - 7$ függvény. Számítsa ki $(f \circ g)(7)$.
- 5p** 3. Oldja meg a $\sqrt{2x-1} = x-2$ egyenletet a valós számok halmazán!
- 5p** 4. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy az egyjegyű természetes számok halmazából véletlenszerűen kiválasztott n számra teljesüljön az $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) > 0$ egyenlőtlenség!
- 5p** 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(1,1)$, $B(-1,0)$, $C(3,5)$ és $D(5,6)$ pontok. Igazolja, hogy a B , a D pontok, valamint az AC szakasz felezőpontja kollineárisak!
- 5p** 6. Határozza meg az $x \in (0, \pi)$ számot, tudva azt, hogy $(\sin x - \cos x)^2 = 2$.

II. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és az $A(a) = \begin{pmatrix} 1+2^a & 2^a \\ -2^a & 1-2^a \end{pmatrix}$ mátrix, ahol a valós szám.
- 5p** a) Igazolja, hogy $\det(A(0)) = 1$.
- 5p** b) Igazolja, hogy $A(1) + A(2) - A(1) \cdot A(2) = I_2$.
- 5p** c) Adott az m és az n természetes szám, amelyre $A(m) \cdot A(n) = A(m+n)$. Igazolja, hogy $m = n = 1$.
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x * y = x^2 + y^2 + x + y$ műveletet.
- 5p** a) Igazolja, hogy $(-1) * (-1) = 0$.
- 5p** b) Bizonyítsa be, hogy $x * y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$ bármely x és y valós szám esetén!
- 5p** c) Határozza meg az x valós szám értékeinek halmazát, amelyekre $x^2 * x^2 \leq 4$.

III. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $f: (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x - \frac{1}{2} \ln(x+2)$ függvény.
- 5p** a) Igazolja, hogy $f'(x) = \frac{(2x+3)(2x+5)}{2(x+2)}$, $x \in (-2, +\infty)$.
- 5p** b) Számítsa ki $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x - f(x)}{x}$.
- 5p** c) Bizonyítsa be, hogy $x^2 + 4x + \frac{15}{4} \geq \frac{1}{2} \ln(2x+4)$ bármely $x \in (-2, +\infty)$ esetén!
2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \frac{2}{x^2 + 1}$ függvény.
- 5p** a) Igazolja, hogy $\int_0^3 (x^2 + 1) f(x) dx = 18$.

5p b) Igazolja, hogy $\int_1^3 x f(x) dx = 4 + \ln 5$.

5p c) Bizonyítsa be, hogy $F(x+1) \geq F(x) + 1$ bármely x valós szám esetén, ahol F egy primitív függvénye az f -nek!