

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de trei ore.

I.FELADATSOR

(30 punct)

- 5p** 1. Adott a $z = 3 + 2i$ komplex szám. Igazold, hogy $z + \frac{13}{z} = 6$.
- 5p** 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 5$ és a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + x$ függvény. Határozd meg azt az a valós számot, amelyre $(f \circ g)(a) = (f \circ g)(-a)$.
- 5p** 3. Oldd meg a valós számok halmazán a $3^{3x+5} = 9 \cdot 3^{x+1}$ egyenletet!
- 5p** 4. Adott egy A halmaz, amelynek 4 eleme van. Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy az A halmaz részhalmazainak a halmazából egy véletlenszerűen kiválasztott halmaz elemeinek száma páratlan legyen!
- 5p** 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(1,3)$, $B(3,5)$ és $C(0,6)$ pontok. Határozd meg annak a d egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az A ponton, és párhuzamos az ABC háromszög C csúcsából kiinduló oldalfelezőjével!
- 5p** 6. Számítsd ki az ABC háromszög BC oldalának hosszát tudva, hogy $AB = 2$, $AC = 2\sqrt{3}$ és $B = \frac{\pi}{3}$.

II.FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az a nullától különböző valós szám és az $A(x) = \begin{pmatrix} 1+2x & 0 & -4x \\ 0 & a & 0 \\ x & 0 & 1-2x \end{pmatrix}$ mátrix, ahol x valós szám.
- 5p** a) Igazold, hogy $\det(A(x)) = a$, bármely x valós szám esetén!
- 5p** b) Határozd meg az a nullától különböző valós számot úgy, hogy $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, bármely x és y valós szám esetén!
- 5p** c) Az $a = 1$ érték esetén, határozd meg az $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mátrixot úgy, hogy $A(2) \cdot X = A(3)$.
2. Az $M = [0, +\infty)$ halmazon értelmezzük az $x * y = \log_2(2^x + 2^y - 1)$ asszociatív műveletet.
- 5p** a) Igazold, hogy $0 * 2021 = 2021$.
- 5p** b) Határozd meg a „*” művelet semleges elemét!
- 5p** c) Határozd meg azt az $x \in M$ számot, amelyre $x * (x+1) * (x+2) = \log_2 54$.

III.FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}}$ függvény.
- 5p** a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{1-x^2}{2(x^2+1)\sqrt{(x^2+x+1)(x^2+1)}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Határozd meg az f függvény grafikus képe vízszintes aszimptotájának egyenletét a $-\infty$ felé!
- 5p** c) Bizonyítsd be, hogy $\sqrt{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}} + \sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+1}} \leq \sqrt{6}$, bármely x valós szám esetén!

2. Adott az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3 - 2 \ln x$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $\int_1^3 (f(x) + 2 \ln x) dx = 14$.

5p b) Számítsd ki: $\int_1^e (2x + 3 - f(x)) dx$.

5p c) Igazold, hogy $\int_0^1 x^2 f(x^3 + 1) dx = \frac{4(2 - \ln 2)}{3}$.