Bacalaureat iunie – iulie 2010

Subiectul I

1. Calculaţi $\log_2 \frac{1}{8} + \sqrt[3]{27}$.

R. $\log_2 \frac{1}{8} + \sqrt[3]{27} = \log_2 8^{-1} + \sqrt[3]{3^3} = \log_2 2^{-3} + 3 = -3 + 3 = 0$.

2. Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2 - 2x + 3$.

R. Coordonatele vârfului parabolei sunt $x_V = -\frac{b}{2a}, y_V = -\frac{\Delta}{4a}$. Pentru parabola dată avem: a=1, b= –2, c=3 şi $\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8$. Se obţine $x_V = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1, y_V = -\frac{-8}{4 \cdot 1} = 2$ şi vârful are coordonatele $V(1;2)$.

3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2 - 3^{x^2-1} = 1$.

R. $2 - 3^{x^2-1} = 1 \Rightarrow -3^{x^2-1} = 1 - 2 \Rightarrow -3^{x^2-1} = -1 \Big| \cdot (-1) \Rightarrow 3^{x^2-1} = 3^0 \overset{inj.f.\ \exp}{\Rightarrow}$
$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$.

4. Determinaţi câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii $\{1,2,3,4\}$.

R. Se pot forma $A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

5. Se consideră vectorii $\vec{v_1} = 2\vec{i} - \vec{j}$ şi $\vec{v_2} = \vec{i} + 3\vec{j}$. Determinaţi coordonatele vectorului $\vec{w} = 2\vec{v_1} - \vec{v_2}$.

R. $\vec{w} = 2\vec{v_1} - \vec{v_2} = 2\left(2\vec{i} - \vec{j}\right) - \left(\vec{i} + 3\vec{j}\right) = 4\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{i} - 3\vec{j} = 3\vec{i} - 5\vec{j}$ şi $\vec{w}(3,-5)$.

6. Un triunghi dreptunghic are catetele *AB* = 3, *AC* = 4 . Determinaţi lungimea înălţimii duse din *A*.

R. Teorema lui Pitagora: $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow$
$BC^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow BC = \sqrt{25} = 5$. Fie $D \in BC$ piciorul înălţimii duse din *A*, atunci $AD = \frac{AB \cdot AC}{BC} \Rightarrow AD = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculaţi $A^2 - A$.

R. $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 1-1 \\ 1-1 & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

b) Determinaţi inversa matricei *A*.

R. Calculăm determinantul matricei *A*: $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0$, deci matricea *A* este inevrsabilă.

I. Din punctual **a)** avem: $A^2 - A = I_2 \Rightarrow A(A - I_2) = I_2 \Rightarrow A - I_2 = A^{-1}$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

II. Calculăm conform teoriei: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^*$ şi $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$. Transpusa matricei *A* este ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 0 = 0, A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 1 = -1, \\ A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 1 = -1, A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1 \end{matrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Rezolvaţi ecuaţia $A \cdot X = \begin{pmatrix} 2010 & 2010 \\ 2009 & 2010 \end{pmatrix}$, $X \in M_2(\mathbf{R})$.

R. Prin înmulţirea la stânga cu A^{-1} se obţine:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 2010 & 2010 \\ 2009 & 2010 \end{pmatrix} \Big| \cdot A^{-1} \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2010 & 2010 \\ 2009 & 2010 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2010 & 2010 \\ 2009 & 2010 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2010 + 1 \cdot 2009 & 0 \cdot 2010 + 1 \cdot 2010 \\ 1 \cdot 2010 + (-1) \cdot 2009 & 1 \cdot 2010 + (-1) \cdot 2010 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} 2009 & 2010 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbf{Z}_3[X]$, $f = X^2 + X$, $g = X^2 + \hat{2}X + a$, cu $a \in \mathbf{Z}_3[X]$.

a) Calculaţi $f(\hat{0}) + f(\hat{1})$.

R. $f(\hat{0}) = \hat{0}^2 + \hat{0} = \hat{0}$, $f(\hat{1}) = \hat{1}^2 + \hat{1} = \hat{1} + \hat{1} = \hat{2} \Rightarrow f(\hat{0}) + f(\hat{1}) = \hat{2}$.

b) Determinaţi rădăcinile polinomului *f*.

R. $\mathbf{Z}_3[X] = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}$ şi verificăm $f(\hat{0}) = \hat{0}, f(\hat{1}) = \hat{2}, f(\hat{2}) = \hat{2}^2 + \hat{2} = \hat{1} + \hat{2} = \hat{0}$.

Atunci rădăcinile polinomului *f* sunt $S = \{\hat{0}, \hat{2}\}$.

c) Demonstraţi că $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) = g(\hat{0}) + g(\hat{1}) + g(\hat{2})$, pentru oricare $a \in \mathbf{Z}_3[X]$.

R. $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) = \hat{0} + \hat{2} + \hat{0} = \hat{2}$,

$g(0) = \hat{0}^2 + \hat{2} \cdot \hat{0} + a = a, g(\hat{1}) = \hat{1}^2 + \hat{2} \cdot \hat{1} + a = a, g(\hat{2}) = \hat{2}^2 + \hat{2} \cdot \hat{2} + a = \hat{1} + \hat{1} + a = \hat{2} + a$,

$g(\hat{0})+g(\hat{1})+g(\hat{2})=a+a+\hat{2}+a=\hat{2}\Rightarrow f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})=g(\hat{0})+g(\hat{1})+g(\hat{2})=\hat{2}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2\cdot e^x$.

a) Calculaţi $f'(x)$.

R. Calculăm derivata după regula de derivare a produsului:

$f'(x)=\left(x^2\right)'\cdot e^x+x^2\cdot\left(e^x\right)'=2xe^x+x^2e^x=e^x\left(2x+x^2\right)$.

b) Demonstraţi că funcţia f este descrescătoare pe intervalul $[-2,0]$.

R. Monotonia se determineă din semnul primei derivate. Determinăm punctele critice: $f'(x)=0\Rightarrow e^x\left(x^2+2x\right)=0, e^x>0, x^2+2x=0\Rightarrow x(x+2)=0\Rightarrow x_1=0, x_2=-2$.

Tabelul de semn:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	+ + + + + + + + +		0	− − − − − − − − − −			0	+ + + + + + + + + +	

Pe intervalul $[-2,0], f'(x)\le 0\Rightarrow f$ este descrescătoare.

c) Demonstraţi că $0\le f(x)+f\left(x^2\right)\le\dfrac{e^2+1}{e}$, oricare ar fi $x\in[-1,0]$.

R. Pe intervalul $[-1,0]\subset[-2,0]$ funcţia este descrecătoare $\Rightarrow -1\le x\le 0$, atunci

$f(0)\le f(x)\le f(-1)\Rightarrow 0\le f(x)\le(-1)^2\cdot e^{-1}\Rightarrow 0\le f(x)\le\dfrac{1}{e}$ **(1)**.

Dacă $x\in[-1,0]\Rightarrow x^2\in[0,1]$ interval pe care $f'(x)\ge 0\Rightarrow f$ este funcţie crescătoare, deci $0\le x^2\le 1\Rightarrow f(0)\le f(x^2)\le f(1)\Rightarrow 0\le f\left(x^2\right)\le 1^2\cdot e^1\Rightarrow 0\le f\left(x^2\right)\le e$. **(2)**

Adunăm relaţiile **(1)** şi **(2)** şi obţinem:

$$\left.\begin{array}{l}0\le f(x)\le\dfrac{1}{e}\\ 0\le f\left(x^2\right)\le e\end{array}\right\}\Rightarrow 0\le f(x)+f\left(x^2\right)\le\frac{1}{e}+e\Rightarrow 0\le f(x)+f\left(x^2\right)\le\frac{1+e^2}{e},\ \forall x\in[-1,0].$$

2. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}^*\to\mathbf{R}, f(x)=x+\dfrac{1}{x}$.

a) Calculaţi $\displaystyle\int_1^3\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx$.

R. $\displaystyle\int_1^3\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^3\left(x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^3 xdx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^3=\frac{3^2-1^2}{2}=\frac{8}{2}=4$.

b) Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[1,2]\to\mathbf{R}, g(x)=f(x)$.

R.

$$Vol(Cf)=\pi\int_1^2 g^2(x)dx=\pi\int_1^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2dx=\pi\int_1^2\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)dx=$$

$$=\pi\left(\frac{x^3}{3}+2x-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^2=\pi\left(\frac{8}{3}+4-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-2+1\right)=\pi\left(\frac{{}^{2)}7}{3}-\frac{{}^{3)}1}{2}+{}^{6)}3\right)=$$

$$=\frac{14-3+18}{6}\pi=\frac{29}{6}\pi$$

c) Calculaţi $\int_1^e f(x)\cdot\ln x dx$.

R.

$$\int_1^e f(x)\cdot\ln xdx=\int_1^e\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln xdx=\int_1^2 x\ln xdx+\int_1^2\frac{1}{x}\ln xdx=\left(\frac{x^2}{2}\ln x\right)\Bigg|_1^e-$$

$$-\int_1^e\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}dx+\int_0^1 udu=\frac{e^2}{2}\ln e-\frac{1}{2}\ln 1-\frac{x^2}{4}\Bigg|_1^e+\frac{u^2}{2}\Bigg|_0^1=\frac{{}^{2)}e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}+\frac{{}^{2)}1}{2}=\frac{e^2+3}{4}$$

$Int.prin\,parti:$ $\quad$ $Int.\ prin\,schimb.de\,\text{var}.$

$f(x)=\ln x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$ $\quad$ $u(x)=\ln x\Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$

$g'(x)=x\Rightarrow g(x)=\frac{x^2}{2}$ $\quad$ $u(1)=\ln 1=0,\ u(e)=\ln e=1$