

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Határozd meg azt a z komplex számot, amelyre $3z + 2\bar{z} = 5 + 2i$, ahol \bar{z} a z konjugáltja!
- 5p 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + a$ függvény, ahol a valós szám. Határozd meg azt az a valós számot, amelyre $(f \circ f \circ f)(x) = x + 3$, bármely x valós szám esetén!
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazán a $\log_3(2x + 3) - \log_3 x = 1$ egyenletet!
- 5p 4. Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott háromjegyű természetes szám osztható legyen 10-zel!
- 5p 5. Határozd meg azt az a valós számot, amelyre az $\vec{u} = (a + 1)\vec{i} + (5a - 1)\vec{j}$ és $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j}$ vektorok kollineárisak!
- 5p 6. Számítsd ki az ABC háromszög területét, ha $AB = 6$, $AC = 10$ és $\cos A = \frac{3}{5}$.

II. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $M(x) = \begin{pmatrix} x+1 & 0 & x+2 \\ 0 & x & 0 \\ 3-x & 0 & 4-x \end{pmatrix}$ mátrix, ahol x valós szám.
- 5p a) Számítsd ki a $\det(M(-1))$ értéket!
- 5p b) Igazold, hogy $M(x) + M(y) = M(0) + M(x + y)$, bármely x és y valós szám esetén!
- 5p c) Határozd meg azokat az m, n természetes számokból álló számpárokat, amelyekre az $M(m) \cdot M(1)$ mátrix elemeinek összege egyenlő az $M(1) \cdot M(n)$ mátrix elemeinek összegével!
2. A valós számok halmazán értelmezett az $x * y = 4x + 4y - 4xy - 3$ asszociatív művelet.
- 5p a) Igazold, hogy $x * y = 1 - 4(x - 1)(y - 1)$, bármely x és y valós szám esetén!
- 5p b) Igazold, hogy $x * \frac{1}{x} \geq 1$, bármely $x \in (0, +\infty)$ esetén!
- 5p c) Határozd meg azokat az x valós számokat, amelyekre $x * x * x * x = x$.

III. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5 \ln x - x^2 - 3x$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{(1-x)(2x+5)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Igazold, hogy az f függvény konkáv a $(0, +\infty)$ intervallumon!
- 5p c) Igazold, hogy $5 \ln x \leq x^2 + 3x - 4$, bármely $x \in (0, +\infty)$ esetén!
2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 4x + 5)e^x$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy az f függvény minden primitívje növekvő az \mathbb{R} -en!
- 5p b) Számítsd ki: $\int_0^1 (f(x) - x^2 e^x - 5e^x) dx$.
- 5p c) Igazold, hogy $\frac{e^2 - 1}{e^3} \leq \int_{-3}^{-1} f(x) dx \leq \frac{2(e^2 - 1)}{e^3}$.