

Examenul de bacalaureat național 2019  
Proba E. c)

Matematică *M\_mate-info*

Varianta 6

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Igazold, hogy az  $n = (3 - i\sqrt{2})(3 + i\sqrt{2})$  szám egész szám, ahol  $i^2 = -1$ .
- 5p 2. Határozd meg az  $a$  valós számot tudva, hogy az  $A(a, 3)$  pont rajta van az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x + a$  függvény grafikus képén!
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazán a  $2019^x + 2019^{-x} = 2$  egyenletet!
- 5p 4. Határozd meg annak a valószínűségét, hogy a kétjegyű természetes számok halmazából véletlenszerűen kiválasztott szám esetén az egyesek helyén álló számjegy páratlan legyen!
- 5p 5. Az  $xOy$  derékszögű koordináta-rendszerben adottak az  $A(3, -3)$  és  $B(2, -2)$  pontok. Határozd meg annak a  $d$  egyenesnek az egyenletét, amely átmegy az  $A$  ponton és merőleges az  $AB$  egyenesre!
- 5p 6. Igazold, hogy  $\sin(a - b)\sin(a + b) = (\sin a - \sin b)(\sin a + \sin b)$ , bármely  $a$  és  $b$  valós szám esetén!

II. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az  $A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 2 & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix}$  mátrix, ahol  $a$  valós szám.
- 5p a) Igazold, hogy  $\det(A(a)) = 0$ , bármely  $a$  valós szám esetén!
- 5p b) Igazold, hogy  $A(a)A(b) = 2A(ab)$ , bármely  $a$  és  $b$  valós szám esetén!
- 5p c) Igazold, hogy a  $B = A(\log_2 3) \cdot A(\log_3 4) \cdot A(\log_4 5) \cdot \dots \cdot A(\log_{15} 16)$  mátrix minden eleme egész szám!
2. Adott az  $f = X^3 + X^2 + mX + n$  polinom, ahol  $m$  és  $n$  valós szám.
- 5p a) Igazold, hogy  $f(-1) - 2f(0) + f(1) = 2$ , bármely  $m$  és  $n$  valós szám esetén!
- 5p b) Határozd meg az  $m$  és  $n$  valós számokat tudva, hogy az  $f$  polinom osztható az  $X^2 - 1$  polinommal!
- 5p c) Bizonyítsd be, hogy  $3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2x_3) - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) = 1$ , bármely  $m$  és  $n$  valós szám esetén, ahol  $x_1, x_2$  és  $x_3$  az  $f$  polinom gyökei!

III. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 e^{-x}$  függvény.
- 5p a) Igazold, hogy  $f'(x) = x(2 - x)e^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Határozd meg az  $f$  függvény monotonitási intervallumait!
- 5p c) Igazold, hogy bármely  $a \in (0, 4e^{-2})$  esetén az  $f(x) = a$  egyenletnek pontosan három valós megoldása van!

2. Adott az  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + \ln x$  függvény.

5p a) Igazold, hogy  $\int_1^2 (f(x) - \ln x) dx = \frac{7}{3}$ .

5p b) Bizonyítsd be, hogy a  $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 2x - x^2 + f(x)$  függvény grafikus képe, az  $Ox$  tengely valamint az  $x = 1$  és  $x = e$  egyenletű egyenesek által határolt síkidom területe  $e^2$ .

5p c) Igazold, hogy  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{e^{-1}}^1 x^n (f(x) - x^2) dx = 0$ .