

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

ZADANIE I. (30 bodov)

- 5b 1. Ukážete, že číslo $n = (3 - i\sqrt{2})(3 + i\sqrt{2})$ je celé, kde $i^2 = -1$.
- 5b 2. Určte reálne číslo a vediac, že $A(a, 3)$ leží na grafe funkcie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + a$.
- 5b 3. Na množine reálnych čísel riešte rovnicu $2019^x + 2019^{-x} = 2$.
- 5b 4. Vypočítajte pravdepodobnosť, že ak vyberieme jedno číslo spomedzi dvojciferných prirodzených čísel, ono bude mať číslicu jednotiek nepárnu.
- 5b 5. V kartézskej súradnicovej sústave xOy majme body $A(3, -3)$ i $B(2, -2)$. Určte rovnicu priamky d , ktorá prechádza bodom A a je kolmá na AB .
- 5b 6. Ukážete, že $\sin(a-b)\sin(a+b) = (\sin a - \sin b)(\sin a + \sin b)$, pre hociktoré reálne čísla a i b .

ZADANIE II. (30 bodov)

1. Majme maticu $A(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ 0 & 2 & 0 \\ -a & 0 & a \end{pmatrix}$, kde a je reálne číslo.
- 5b a) Ukážete, že $\det(A(a)) = 0$, pre hociktoré reálne číslo a .
- 5b b) Dokážete, že $A(a)A(b) = 2A(ab)$, pre hociktoré reálne čísla a i b .
- 5b c) Dokážete, že matica $B = A(\log_2 3) \cdot A(\log_3 4) \cdot A(\log_4 5) \cdot \dots \cdot A(\log_{15} 16)$ má všetky prvky celé čísla.
2. Majme polynóm $f = X^3 + X^2 + mX + n$, kde m i n sú reálne čísla.
- 5b a) Ukážete, že $f(-1) - 2f(0) + f(1) = 2$, pre hociktoré reálne čísla m i n .
- 5b b) Určte reálne čísla m i n vediac, že polynóm f je deliteľný polynómom $X^2 - 1$.
- 5b c) Dokážete, že $3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2x_3) - (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) = 1$, pre hociktoré reálne čísla m i n , kde x_1, x_2 i x_3 sú korene polynómu f .

ZADANIE III. (30 bodov)

1. Majme funkciu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^{-x}$.
- 5b a) Ukážete, že $f'(x) = x(2-x)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5b b) Určte intervaly monotónnosti pre funkciu f .
- 5b c) Dokážete, že pre hociktoré $a \in (0, 4e^{-2})$, rovnica $f(x) = a$ má presne tri reálne korene.
2. Majme funkciu $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \ln x$.
- 5b a) Ukážete, že $\int_1^2 (f(x) - \ln x) dx = \frac{7}{3}$.
- 5b b) Dokážete, že rovinná plocha ohraničená grafom funkcie $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x - x^2 + f(x)$, osou Ox a priamkami s rovnicami $x=1$ i $x=e$ má obsah rovný s e^2 .
- 5b c) Dokážete, že $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{e^{-1}}^1 x^n (f(x) - x^2) dx = 0$.