Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

ZADANIE I. (30 bodov)

5b	**1.** Ukážte, že súčet prvkov množiny $A=\{n\in\mathbb{N} \mid n-1\le 4\}$ je 15.
5b	**2.** Majme funkciu $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+m$, kde m je reálne číslo. Určte reálne číslo m, vediac, že vrchol paraboly prislúchajúcej funkcii f má *y*-ovu súradnicu 2.
5b	**3.** Na množine reálnych čísel vyriešte rovnicu $\sqrt{x+3}=\sqrt{9-x}$.
5b	**4.** Určte počet podmnožín obsahujúcich aspoň 8 prvkov jednej množiny, ktorá má presne 10 prvkov.
5b	**5.** V kaztézskej súradnicovej sústave xOy majme body $A(5,1)$, $B(-1,3)$ i $C(8,10)$. Určte dĺžku úsečky CD, kde bod D je stred úsečky AB.
5b	**6.** Ukážte, že $1+\cos\pi+\cos 2\pi+\cos 3\pi+\ldots+\cos 2019\pi=0$.

ZADANIE II. (30 bodov)

	1. Majme matice $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ i $A(a)=\begin{pmatrix}a+1&0&0\\1&a&1\\0&0&a+1\end{pmatrix}$, kde a je reálne číslo.
5b	**a)** Ukážte, že $\det\big(A(1)\big)=4$.
5b	**b)** Dokážte, že $A(a)A(b)=abI_3+(a+b+1)A(0)$, pre hociktoré reálne čísla a i b.
5b	**c)** Určte prirodzené číslo n, pre ktoré $A(0)A(1)A(2)\ldots A(2019)=n!A(0)$.
	2. Majme polynóm $f=X^3-mX^2+2X+3-m$, kde m je reálne číslo.
5b	**a)** Určte reálne číslo m, vediac že $f(1)=0$.
5b	**b)** Pre $m=3$, určte korene polynómu f.
5b	**c)** Určte reálne číslo m pre ktoré $x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)^3-12$, kde x_1, x_2 i x_3 sú korene polynómu f.

ZADANIE III. (30 bodov)

	1. Majme funkciu $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\dfrac{2}{x+1}-\ln\dfrac{x}{x+1}$.
5b	**a)** Ukážte, že $f'(x)=\dfrac{x-1}{x(x+1)^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
5b	**b)** Určte rovnicu vodorovnej asymptoty k $+\infty$ ku grafu funkcie f.
5b	**c)** Majme funkcie $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ i $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=\ln\dfrac{x}{x+1}$. Dokážte, že grafy funkcií g i h **nemajú** ani jeden spoločný bod.
	2. Majme funkciu $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+4}$.
5b	**a)** Ukážte, že $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,dx=\frac{13}{3}$.
5b	**b)** Ukážte, že rovinná plocha ohraničená grafom funkcie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\,f(x)$, osou Ox a priamkami s rovnicami $x=-1$ i $x=1$, má obsah $\dfrac{10\sqrt{5}-16}{3}$.
5b	**c)** Vypočítajte $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\int_0^x t^3 f(t)\,dt$.