

**Examenul de bacalaureat național 2019**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**Varianta 6**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**PRIMO QUESITO**

**(30 puncti)**

- 5p** 1. Determinate il termine  $b_3$  della progressione geometrica  $(b_n)_{n \geq 1}$ , conoscendo che  $b_1 = 1$  e la ragione  $q = 5$ .
- 5p** 2. Si considerano le funzioni  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - x + 1$  e  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 4x - 5$ . Determinate le ascisse dei punti di intersezione dei grafici delle due funzioni.
- 5p** 3. Risolvete nell'insieme dei numeri reali l'equazione  $\sqrt{2x} + x = 4$ .
- 5p** 4. Calcolate la probabilità che, scegliendo un numero dell'insieme  $A = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{49}\}$ , questo sia numero naturale.
- 5p** 5. Sul piano cartesiano  $xOy$  si considerano i punti  $A(2,3)$ ,  $B(-3,0)$  e  $C(-3,6)$ . Determinate l'equazione della mediana del vertice  $A$  del triangolo  $ABC$ .
- 5p** 6. Dimostrate che  $\sin x(3 \sin x - \cos x) + \cos x(\sin x + 3 \cos x) = 3$ , per ogni numero reale  $x$ .

**SECONDO QUESITO**

**(30 puncti)**

1. Si considerano le matrici  $A(a) = \begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix}$ , con  $a$  numero reale.
- 5p** a) Dimostrate che  $\det(A(-1)) = 17$ .
- 5p** b) Dimostrate che  $A(2019 - a) + A(2019 + a) = 2A(2019)$ , per ogni numero reale  $a$ .
- 5p** c) Determinate le coppie di numeri reali  $x$  e  $y$ , per le quali  $A(x)A(y) = 2A(-8)$ .
2. Sull'insieme  $G = (-2, 2)$  è definita la legge di composizione  $x * y = \frac{4x + 4y}{4 + xy}$ .
- 5p** a) Dimostrate che  $0$  è l'elemento neutro della legge di composizione „\*”.
- 5p** b) Determinate  $x \in G$ , per il quale  $x * x = \frac{8}{5}$ .
- 5p** c) Si considera la funzione  $f: (0, +\infty) \rightarrow G$ ,  $f(x) = \frac{2(x-1)}{x+1}$ . Dimostrate che  $f(xy) = f(x) * f(y)$ , per ogni  $x, y \in (0, +\infty)$ .

**TERZO QUESITO**

**(30 puncti)**

1. Si considera la funzione  $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 - 2x + 2 \ln(x+1)$ .
- 5p** a) Dimostrate che  $f'(x) = \frac{-2x}{x+1}$ ,  $x \in (-1, +\infty)$ .
- 5p** b) Determinate l'equazione della tangente al grafico della funzione  $f$  nel suo punto di ascissa  $x = 0$ .
- 5p** c) Dimostrate che  $\ln(1 + \cos x) \leq \cos x$ , per ogni  $x \in (0, \pi)$ .
2. Si considera la funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x+3}{e^x}$ .
- 5p** a) Dimostrate che  $\int_{-1}^1 f(x)e^x dx = 6$ .
- 5p** b) Dimostrate che qualunque primitiva della funzione  $f$  è crescente nell'intervallo  $[-3, +\infty)$ .
- 5p** c) Determinate il numero naturale  $n$  diverso da zero, conoscendo che la superficie piana limitata dal grafico della funzione  $f$ , l'asse  $Ox$  e le rette di equazioni  $x = 0$  e  $x = n$  ha l'area uguale a  $4 - 6e^{-n}$ .