

Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M\_mate-info*

Test 12

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul  $N = (\sqrt{5} + \sqrt{13})^2 + (\sqrt{5} - \sqrt{13})^2$  este pătratul unui număr natural.
- 5p 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + a$ , unde  $a$  este număr real. Determinați numărul real  $a$ , știind că  $(f \circ f)(1) + f(1) = 1$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $4^x + 4^{1-x} = 4$ .
- 5p 4. Determinați numărul numerelor naturale de trei cifre distincte care se pot forma cu elementele mulțimii  $A = \{0, 5, 7\}$ .
- 5p 5. Se consideră punctul  $G$ , centrul de greutate al triunghiului  $ABC$  și punctul  $M$ , mijlocul segmentului  $AG$ . Demonstrați că  $6\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AC}$ .
- 5p 6. Calculați măsura unghiului  $A$  al triunghiului ascuțitunghic  $ABC$ , știind că  $4\mathcal{A}_{ABC} = AB \cdot AC$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ a+4 & a+3 & a \end{pmatrix}$ , unde  $a$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det(A(0)) = -15$ .
- 5p b) Determinați numărul real  $a$  pentru care rangul matricei  $A(a)$  **nu** este egal cu 3.
- 5p c) Demonstrați că matricea  $M = A(-1) \cdot A(-1) \cdot A(-1) \cdot A(-1)$  are toate elementele numere întregi, divizibile cu 25.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + 2020}$ .
- 5p a) Arătați că  $x * (-x) = \sqrt[3]{2020}$ , pentru orice număr real  $x$ .
- 5p b) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $(x+1) * (-x) = \sqrt[3]{2021}$ .
- 5p c) Demonstrați că, pentru orice număr real  $a$ , există un unic număr real  $x$  pentru care  $x * x * x = a$ .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = 3(x-1)(x-3)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Determinați intervalele de monotonie a funcției  $f$ .
- 5p c) Demonstrați că funcția  $f$  este concavă pe  $(-\infty, 2]$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+3x+5}}$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_0^1 f(x) \cdot \sqrt{x^2+3x+5} dx = 4$ .

**5p** b) Calculați  $\int_{-4}^1 f(x) dx$ .

**5p** c) Arătați că  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x f(\sin x) dx = 6 - 2\sqrt{5}$ .