Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

I. FELADATSOR (30 pont)

5p **1.** Adott a $z=2+i$ komplex szám. Igazold, hogy $z^2-4z+5=0$.

5p **2.** Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+a$ függvény, ahol a valós szám. Határozd meg az a valós számot tudva azt, hogy az $M(0,2)$ pont rajta van az f függvény grafikus képén!

5p **3.** Oldd meg a valós számok halmazán az $x=\sqrt[3]{x^3+2x}$ egyenletet!

5p **4.** Határozd meg annak a valószínűségét, hogy az olyan ötjegyű természetes számok halmazából, amelynek számjegyei különbözőek és az $\{1,2,3,4,5\}$ halmazból vannak, ha véletlenszerűen kiválasztunk egy számot abban a tízesek számjegye 2 és az egyesek számjegye 3 legyen!

5p **5.** Az xOy derékszögű koordináta rendszerben adottak az $A(0,1)$, $B(2,3)$ és $C(4,a)$ pontok, ahol a egy valós szám. Határozd meg az a valós számot tudva azt, hogy a C pont az AB szakasz felezőmerőlegesén van!

5p **6.** Az ABC háromszög A, B és C szögeinek mértéke ebben a sorrendben, egy számtani haladvány egymást követő tagjai. Igazold, hogy a B szög mértéke $\frac{\pi}{3}$.

II. FELADATSOR (30 pont)

1. Adott az $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1+\ln x\\ 0 & x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ mátrix, ahol $x\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Igazold, hogy $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Bizonyítsd be, hogy $A(x)A(y)=A(y)A(x)$, bármely $x,y\in(0,+\infty)$ esetén!

5p **c)** Határozd meg az n természetes számot, amelyre $A\left(\frac{1}{3}\right)\cdot A\left(\frac{1}{2}\right)\cdot A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)=\begin{pmatrix}1 & 0 & n\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. A valós számok halmazán értelmezett az $x*y=xy-4(x+y)+a$ művelet, ahol a valós szám.

5p **a)** Ha $a=10$ igazold, hogy $1*2=0$.

5p **b)** Ha $a=20$ igazold, hogy az $e=5$ a „$*$” művelet semleges eleme!

5p **c)** Bizonyítsd be, hogy ha $a\in[20,+\infty)$, akkor a $H=[4,+\infty)$ halmaz a valós számok halmazának egy zárt részhalmaza a „$*$” műveletre nézve!

III. FELADATSOR (30 pont)

1. Adott az $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $f(x)=6^x-3^x+2^x$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $f'(0)=\ln 4$.

5p **b)** Tekintsük az f függvény grafikus képének az $x=0$ abszcisszájú pontjában húzott érintőjét. Határozd meg az a valós számot, amelyre az $A(a,\ln(16e))$ pont rajta van ezen az érintőn!

5p **c)** Számítsd ki: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(f(x))}{x}$.

2. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{2x}{x^2+3}-\frac{2}{x^2+3}$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy $\int_1^2 \left(x^2+3\right)f(x)\,dx=\frac{1}{3}$.

5p **b)** Igazold, hogy $\int_0^1 f(x)\,dx=1-\ln\frac{4}{3}-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

5p **c)** Minden nemnulla n természetes szám esetén adott az $I_n=\int_0^1 f^n(x)\,dx$ szám. Igazold, hogy $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.