

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

ZADANIE I.

(30 bodov)

- 5b 1. Ukážete, že číslo $z = (1 - i\sqrt{2})(1 + i\sqrt{2})$ je prirodzené, kde $i^2 = -1$.
- 5b 2. Majme funkciu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + a$, kde a je reálne číslo. Určte reálne číslo a , vďaka čomu platí $f(x) + f(1-x) = 7$, pre hociktoré reálne číslo x .
- 5b 3. Na množine reálnych čísel vyriešte rovnicu $5^x + 5^{-x} = 2$.
- 5b 4. Majme množinu $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Určte počet trojprvkových podmnožín množiny A , ktoré obsahujú prvok 1.
- 5b 5. V karteziánskej súradnicovej sústave xOy majme bod $M(-4, 4)$. Určte rovnicu priamky d , ktorá prechádza bodom M a ktorá je kolmá na priamku OM .
- 5b 6. Trojuholník ABC je pravouhlý v A a $\sin B = \cos B$. Ukážete, že trojuholník ABC je rovnoramenný.

ZADANIE II.

(30 bodov)

1. Majme maticu $A(a) = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a^2+1 & a^2+2 & a^2+3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, kde a je reálne číslo.
- 5b a) Ukážete, že $\det(A(0)) = -1$.
- 5b b) Dokážete, že pre hociktoré reálne číslo a , matica $A(a)$ má inverznú maticu.
- 5b c) Určte celé čísla a , pre ktoré všetky prvky inverznej matice k matici $A(a)$ sú celé čísla.
2. Na množine $A = [1, +\infty)$ je definovaný zákon kompozície $x * y = \frac{1}{2} \sqrt[3]{x^3 y^3 - x^3 - y^3 + 9}$.
- 5b a) Ukážete, že $1 * 2020 = 1$.
- 5b b) Dokážete, že $x * y = \sqrt[3]{\frac{1}{8}(x^3 - 1)(y^3 - 1) + 1}$, pre hociktoré $x, y \in A$.
- 5b c) Určte $x \in A$, pre ktoré $x * x = x$.

ZADANIE III.

(30 bodov)

1. Majme funkciu $f: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln \frac{x-1}{x}$.
- 5b a) Ukážete, že $f'(x) = \frac{-3x+4}{x(x-1)(x-2)^2}$, $x \in (2, +\infty)$.
- 5b b) Určte rovnicu vodorovnej asymptoty k $+\infty$ ku grafu funkcie f .
- 5b c) Dokážete, že $\frac{1}{x-2} > \ln \frac{x}{x-1}$, pre hociktoré $x \in (2, +\infty)$.
2. Majme funkciu $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$.
- 5b a) Ukážete, že $\int_0^1 (x^3+1) f^2(x) dx = \frac{1}{3}$.

5b b) Ukáźte, že $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{3} \ln 2$.

5b c) Pre každé prirodzené číslo n rôzne od nuly, majme číslo $I_n = \int_0^1 f(x^n) dx$. Dokáźte, že

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$