

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

ЗАВДАННЯ I

(30 балів)

- 56 1. Докажіть, що $z = (1 - i\sqrt{2})(1 + i\sqrt{2})$ - натуральне число, де $i^2 = -1$.
- 56 2. Розглядають функцію $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + a$, де a - дійсне число. Визначте дійсне число a , знаючи, що $f(x) + f(1-x) = 7$, для будь-якого дійсного числа x .
- 56 3. У множині дійсних чисел розв'яжіть рівняння $5^x + 5^{-x} = 2$.
- 56 4. Розглядають множину $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Визначте число підмножин з трьома елементами множини A , які містять 1.
- 56 5. У декартовому репері xOy задають точку $M(-4, 4)$. Напишіть рівняння прямої d яка проходить через точку M і є перпендикулярною до прямої OM .
- 56 6. Трикутник ABC - прямокутний у точці A і $\sin B = \cos B$. Докажіть, що ABC - рівнобедрений трикутник.

ЗАВДАННЯ II

(30 балів)

1. Розглядають матрицю $A(a) = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a^2+1 & a^2+2 & a^2+3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, де a - дійсне число.
- 56 а) Докажіть, що $\det(A(0)) = -1$.
- 56 б) Докажіть, що для будь-якого дійсного числа a , матриця $A(a)$ є обертаючою.
- 56 в) Визначте цілі числа a для яких обернена матриця до $A(a)$ має усі елементи цілі числа.
2. На множині $A = [1, +\infty)$ задають закон композиції $x * y = \frac{1}{2} \sqrt[3]{x^3 y^3 - x^3 - y^3 + 9}$.
- 56 а) Докажіть, що $1 * 2020 = 1$.
- 56 б) Докажіть, що $x * y = \sqrt[3]{\frac{1}{8}(x^3 - 1)(y^3 - 1)} + 1$, для будь-яких $x, y \in A$.
- 56 в) Знайдіть $x \in A$, для яких $x * x = x$.

ЗАВДАННЯ III

(30 балів)

1. Розглядають функцію $f: (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-2} + \ln \frac{x-1}{x}$.
- 56 а) Докажіть, що $f'(x) = \frac{-3x+4}{x(x-1)(x-2)^2}$, $x \in (2, +\infty)$.
- 56 б) Напишіть рівняння горизонтальної асимптоти до $+\infty$ до графіка функції f .
- 56 в) Докажіть, що $\frac{1}{x-2} > \ln \frac{x}{x-1}$, pentru orice $x \in (2, +\infty)$.
2. Розглядають функцію $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$.
- 56 а) Докажіть, що $\int_0^1 (x^3+1) f^2(x) dx = \frac{1}{3}$.

56 b) Докажіть, що $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{3} \ln 2$.

56 c) Для кожного ненульового натурального числа n , розглядають число $I_n = \int_0^1 f(x^n) dx$.
Докажіть, що $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.