

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Testul 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 pont)

- 5p** 1. Határozd meg azt a z komplex számot, amelyre $z - 2\bar{z} = -2 + 6i$.
- 5p** 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + m$ függvény, ahol m pozitív valós szám. Határozd meg az m pozitív valós számot úgy, hogy az $f(0)$, $f(1)$ és $f(2)$ számok ebben a sorrendben egy mértani haladvány egymásutáni tagjai legyenek.
- 5p** 3. Oldd meg a valós számok halmazán a $2\log_5(x-1) = \log_5(3x+1)$ egyenletet.
- 5p** 4. Számítsd ki annak valószínűségét, hogy véletlenszerűen kiválasztva az $A = \{0, 1, 2, \dots, 20\}$ halmazból egy számot, annak négyzete is az A halmazban legyen.
- 5p** 5. Adottak az A , B , C és D pontok úgy, hogy $2\overline{AD} = \overline{BD} + \overline{AC}$. Bizonyítsd be, hogy $\overline{AB} = \overline{DC}$.
- 5p** 6. Adott az ABC háromszög, amelyben az A szög mértéke 30° . Bizonyítsd be, hogy a BC oldal hossza egyenlő a háromszög köré írható kör sugarának hosszával.

II. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}$ mátrix, ahol m valós szám.

- 5p** a) Igazold, hogy $\det(A(m) + A(-m)) = 8$, bármely m valós szám esetén.
- 5p** b) Határozd meg azt az m valós számot, amelyre teljesül az $A(m) \cdot A(m) = A(0)$ egyenlőség.
- 5p** c) Bizonyítsd be, hogy $A(1) - A(2) + A(3) - A(4) + \dots + A(2n-1) - A(2n) = n(A(-1) - A(0))$, bármely nullától különböző n természetes szám esetén.
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x * y = x^2 + 4xy + y^2$ műveletet.
- 5p** a) Igazold, hogy $\frac{1}{2} * \frac{3}{2} = \frac{11}{2}$.
- 5p** b) Határozd meg azokat az x valós számokat, amelyekre $(x * (-x)) * ((-x) * x) = 24x$.
- 5p** c) Igazold, hogy $x * \frac{1}{x} \geq 6$, bármely nullától különböző x valós szám esetén.

III. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$ függvény.

- 5p** a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{2(1-x)}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Számítsd ki $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^{2x}$.
- 5p** c) Bizonyítsd be, hogy $\frac{e^x+2}{\sqrt{3}} \leq \sqrt{e^{2x}+2}$, bármely x valós szám esetén.

2. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - \ln x$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $\int_1^{\sqrt{2}} (f(x) + \ln x) dx = \frac{3}{4}$.

5p b) Számítsd ki $\int_1^e x(x^3 - f(x)) dx$.

5p c) Igazold, hogy $\int_1^{e^2} \frac{1}{x} f(\sqrt{x}) dx = \frac{2e^3 - 5}{3}$.