

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

ЗАВДАННЯ I

(30 балів)

- 5р 1. Докажіть, що $(1+i)^2 - 2(1+i) + 2 = 0$, де $i^2 = -1$.
- 5р 2. Розглядають функцію $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + ax - 5$, де a - дійсне число. Знайдіть дійсне число a , знаючи, що точка $M(1,2)$ належить графіку функції f .
- 5р 3. У множині дійсних чисел розв'яжіть рівняння $\log_4(x^2 + 1) = \log_4 x + \log_4(x + 1)$.
- 5р 4. Обчисліть ймовірність того, що вибираючи число з множини двоцифрових натуральних чисел, воно ділиться на 2 і 5.
- 5р 5. У декартовому репері xOy розглядають точки $M(3,4)$, $N(0,1)$ і $P(3,0)$. Напишіть рівняння прямої d яка проходить через точку P і є паралельною до прямої MN .
- 5р 6. Розглядають трикутник ABC , прямокутний у C . Докажіть, що $\operatorname{tg} B = \frac{1}{\operatorname{tg} A}$.

ЗАВДАННЯ II

(30 балів)

1. Розглядають матриці $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ і $A(a) = \begin{pmatrix} a+2 & 0 & -a \\ 0 & 2 & 0 \\ 3a & 0 & 2-3a \end{pmatrix}$, a - дійсне число.
- 5р а) Докажіть, що $\det(A(0)) = 8$.
- 5р б) Визначте матрицю $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, знаючи, що $aB = A(a) - 2I_3$, для будь-якого дійсного числа a .
- 5р в) Знайдіть натуральне число n , для якого $\det(A(n) \cdot A(-n)) > 0$.
2. На множині дійсних чисел задають асоціативний закон композиції $x * y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.
- 5р а) Докажіть, що $2 * 0 = 2$.
- 5р б) Докажіть, що, якщо a і b дійсні числа, так що $a \leq b$, тоді $a * b = b$.
- 5р в) Знайдіть дійсні числа x для яких $(2x) * (x^2 + 1) * (-2x) = 10$.

ЗАВДАННЯ III

(30 балів)

1. Розглядають функцію $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 3}$.
- 5р а) Докажіть, що $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3} - x}{\sqrt{x^2 + 3}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5р б) Напишіть рівняння горизонтальної асимптоти до $+\infty$ для графіка функції f .
- 5р в) Знайдіть множину дійсних чисел a для яких рівняння $f(x) = a$ має один корінь.
2. Розглядають функцію $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 3}$.
- 5р а) Докажіть, що $\int_0^2 (x^2 + x + 3) f(x) dx = 2$.

- 5p** b) Докажіть, що $\int_1^2 g(x) dx = \ln \frac{9}{5}$, де $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{2x+1}{x} \cdot f(x)$.
- 5p** c) Дано дійсні числа a і b , так що $0 \leq a < b$. Для кожного ненульового натурального числа n , розглядають число $I_n = \int_a^b f^n(x) dx$. Докажіть, що $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.