Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

I. THEMA (30 Punkte)

5p **1.** Berechne das arithmetische Mittel der reellen Zahlen $a = 2021 - \sqrt{2}$ und $b = 2021 + \sqrt{2}$.

5p **2.** Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Bestimme die reelle Zahl m, wenn der Punkt $A(1, m)$ zum Schaubild der Funktion f gehört.

5p **3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $\log_3\left(\sqrt{x} + 3\right) + \log_3\left(\sqrt{x} - 3\right) = 2$.

5p **4.** Bestimme die Anzahl der Elemente einer Menge, wenn diese genau 16 Teilmengen hat.

5p **5.** Gegeben sind die Punkte $M(3,0)$, $N(8,3)$ und $P(6,3)$ in dem kartesischen Koordinatensystem xOy. Bestimme die Koordinaten des Punktes Q, wenn $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MQ}$.

5p **6.** Gegeben ist das spitzwinklige Dreieck ABC, wo $\sin 2A \cdot \cos A = \sin A$. Zeige, dass $A = \frac{\pi}{4}$.

II. THEMA (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Matrix $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1 + \log_2 a & 0 & 1 \end{pmatrix}$, wo $a \in (0, +\infty)$.

5p **a)** Zeige, dass $\det\left(A(1)\right) = 1$.

5p **b)** Beweise, dass für jedes $a \in (0, +\infty)$, die Matrix $A(a)$ umkehrbar ist.

5p **c)** Beweise, dass für jedes $a \in (0, +\infty)$, $\det\left(A(a) + \left(A(a)\right)^{-1}\right) \geq 8$, wo $\left(A(a)\right)^{-1}$ die Umkehrmatrix der Matrix $A(a)$ ist.

2. In der Menge der reellen Zahlen definiert man die Verknüpfung $x \circ y = xy - m(x + y) + m(m + 1)$, wo $m \in (0, +\infty)$.

5p **a)** Für $m = 1$, zeige, dass $2 \circ 2 = 2$.

5p **b)** Beweise: wenn $2 \circ 1 = 5$, dann $2 \circ 5 = 1$.

5p **c)** Bestimme die reelle Zahl x, wenn $\left(mx^3\right) \circ \left(-mx^2\right) = m$, für jedes $m \in (0, +\infty)$.

III. THEMA (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Funktion $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2 - 4\ln x$.

5p **a)** Zeige, dass $f'(x) = \frac{4\left(x^2 + 1\right)(x + 1)(x - 1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

5p **b)** Bestimme die Monotonieintervalle der Funktion f.

5p **c)** Beweise, dass die Gleichung $f(x) = 0$ genau zwei verschiedene Lösungen in dem Intervall $(0, +\infty)$ hat.

2. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\dfrac{2x}{x^4+1}$.

5p **a)** Zeige, dass $\int_0^1 \left(x^4+1\right) f(x)\,dx=\dfrac{11}{5}$.

5p **b)** Gegeben ist $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine Stammfunktion der Funktion f. Wenn bekannt ist, dass das Schaubild der Funktion F eine schiefe Asymptote gegen $+\infty$ hat, dann berechne den Anstieg dieser Asymptote.

5p **c)** Gegeben ist die Funktion $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, die Stammfunktion der Funktion f für die $G(0)=0$. Zeige, dass $\int_0^1 xG(x)\,dx=\dfrac{1}{3}+\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4}\ln 2$.