

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

СУБЈЕКАТ I

(30 бодова)

- 56 1. Израчунајте аритметичку средину за реалне бројеве $a = 2021 - \sqrt{2}$ и $b = 2021 + \sqrt{2}$.
- 56 2. Сматра се функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Одредите реалан број m , тако да тачка $A(1, m)$ припада графику функције f .
- 56 3. Решите у скупу реалних бројева једначину $\log_3(\sqrt{x} + 3) + \log_3(\sqrt{x} - 3) = 2$.
- 56 4. Одредите број елемената једног скупа, знајући да овај скуп има тачно 16 подскупа.
- 56 5. У картезијанском систему xOy сматрају се тачке $M(3, 0)$, $N(8, 3)$ и $P(6, 3)$. Одредите координате тачке Q , тако да $\overline{MN} + \overline{MP} = \overline{MQ}$.
- 56 6. Сматра се оштроугли троугао ABC у коме $\sin 2A \cdot \cos A = \sin A$. Докажите да $A = \frac{\pi}{4}$.

СУБЈЕКАТ II

(30 бодова)

1. Сматра се матрица $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 1 + \log_2 a & 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $a \in (0, +\infty)$.
- 56 а) Докажите да $\det(A(1)) = 1$.
- 56 б) Докажите да, за било који $a \in (0, +\infty)$, матрица $A(a)$ прихвати инверзну матрицу.
- 56 в) Докажите да, за било који $a \in (0, +\infty)$, $\det(A(a) + (A(a))^{-1}) \geq 8$, где $(A(a))^{-1}$ је инверзна матрица матрице $A(a)$.
2. На скупу реалних бројева дефинише се закон слагања $x \circ y = xy - m(x + y) + m(m + 1)$, где $m \in (0, +\infty)$.
- 56 а) За $m = 1$, докажите да $2 \circ 2 = 2$.
- 56 б) Докажите да, ако $2 \circ 1 = 5$, онда $2 \circ 5 = 1$.
- 56 в) Одредите реални број x , знајући да $(mx^3) \circ (-mx^2) = m$, за било који $m \in (0, +\infty)$.

СУБЈЕКАТ III

(30 бодова)

1. Сматра се функција $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2 - 4 \ln x$.
- 56 а) Докажите да $f'(x) = \frac{4(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 56 б) Одредите интервале монотоније функције f .
- 56 в) Докажите да једначина $f(x) = 0$ има тачно две различите солуције у интервалу $(0, +\infty)$.

2. Смотри се функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \frac{2x}{x^4 + 1}$.
- 56 a) Докажице да $\int_0^1 (x^4 + 1) f(x) dx = \frac{11}{5}$.
- 56 b) Смотри се $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ једна примитивна функције f . Знајући да график функције F прихвати косу асимптоту према $+\infty$, одредице нагиб ове асимптоте.
- 56 c) Смотри се функција $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, примитива функције f тако да $G(0) = 0$. Докажице да $\int_0^1 xG(x) dx = \frac{1}{3} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2$.