

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Testul 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. TÉTEL

(30 punct)

- 5p 1. Határozza meg a $(b_n)_{n \geq 1}$ mértani haladvány első három tagjának összegét, tudva azt, hogy $b_2 = 2$ és $b_3 = 4$.
- 5p 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 5x + 3$ függvény. Számítsa ki azoknak a pontoknak az abszcisszáinak a szorzatát, amelyekben az f függvény grafikus képe az Ox tengelyt metszi!
- 5p 3. Oldja meg a valós számok halmazában a $2\sqrt{x+2} = 1-x$ egyenletet!
- 5p 4. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy kiválasztva egy számot a háromjegyű természetes számok halmazából, ennek a számnak minden számjegye páros legyen!
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(1,3)$, $B(-1,0)$ és $C(a,a+2)$ pontok, ahol a egy valós szám. Határozza meg azt az a valós számot, amelyre az \overline{OC} és \overline{AB} vektorok kollineárisak!
- 5p 6. Igazolja, hogy $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin x$, bármely x valós szám esetén!

II. TÉTEL

(30 punct)

1. Adott az $A(a) = \begin{pmatrix} a & a+1 \\ a+2 & a+3 \end{pmatrix}$ mátrix, ahol a valós szám.
- 5p a) Igazolja, hogy $\det(A(0)) = -2$.
- 5p b) Igazolja, hogy az $A(a)$ mátrix invertálható, bármely a valós szám esetén!
- 5p c) Igazolja, hogy, ha a és b egész számok és $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, úgy, hogy $A(a) \cdot X = A(b)$, akkor az X mátrix elemei egész számok!
2. Az $A = (0, +\infty)$ halmazon értelmezzük az $x \circ y = \frac{2x}{y} + \frac{2y}{x}$ műveletet.
- 5p a) Igazolja, hogy $a = 2 \circ 4$ egész szám!
- 5p b) Igazolja, hogy $x \circ y \geq 4$, bármely $x, y \in A$ esetén!
- 5p c) Igazolja, hogy a „ \circ ” műveletnek **nincs** semleges eleme!

III. TÉTEL

(30 punct)

1. Adott az $f: (-1,1) \cup (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$ függvény.
- 5p a) Igazolja, hogy $f'(x) = \frac{-4x}{(x-1)^2(x+1)^2}$, $x \in (-1,1) \cup (1, +\infty)$.
- 5p b) Határozza meg a függvény grafikus képéhez húzott érintő egyenletét abban a pontban, amelyben a függvény grafikus képe az Oy tengelyt metszi!
- 5p c) Számítsa ki: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f(x+1)}$.
2. Adott az $f: (-4, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+2}{x+4}$ függvény.

5p a) Igazolja, hogy $\int_0^2 (x+4)f(x)dx = 6$.

5p b) Számítsa ki: $\int_0^1 f(x)dx$.

5p c) Igazolja, hogy $\int_0^n f(x)e^{-x}dx < 1$, bármely n nullától különböző természetes szám esetén!