

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică M_{șt-nat}

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. THEMA

(30 Puncte)

- 5p** 1. Bestimme das dritte Glied der geometrischen Folge $(b_n)_{n \geq 1}$, wenn $b_1 = 2$ und $b_2 = 6$.
- 5p** 2. Gegeben sind die Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 7$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x - 7$. Berechne $(f \circ g)(7)$.
- 5p** 3. Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $\sqrt{2x-1} = x - 2$.
- 5p** 4. Berechne die Wahrscheinlichkeit dass, eine gewählte natürliche, einstellige Zahl n , die Ungleichheit $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) > 0$ prüft.
- 5p** 5. Gegeben sind die Punkte $A(1,1)$, $B(-1,0)$, $C(3,5)$ und $D(5,6)$ in dem kartesischen Koordinatensystem xOy . Beweise, dass die Punkte B , D und die Mitte der Strecke AC kollinear sind.
- 5p** 6. Bestimme $x \in (0, \pi)$ so, dass $(\sin x - \cos x)^2 = 2$.

II. THEMA

(30 Puncte)

1. Gegeben sind die Matrizen $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $A(a) = \begin{pmatrix} 1+2^a & 2^a \\ -2^a & 1-2^a \end{pmatrix}$, wo a eine reelle Zahl ist.
- 5p** a) Zeige, dass $\det(A(0)) = 1$.
- 5p** b) Zeige, dass $A(1) + A(2) - A(1) \cdot A(2) = I_2$.
- 5p** c) Gegeben sind die natürlichen Zahlen m und n so, dass $A(m) \cdot A(n) = A(m+n)$. Zeige, dass $m = n = 1$.
2. In der Menge der reellen Zahlen definiert man die Verknüpfung $x * y = x^2 + y^2 + x + y$.
- 5p** a) Zeige, dass $(-1) * (-1) = 0$.
- 5p** b) Beweise, dass $x * y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$, für alle reellen Zahlen x und y .
- 5p** c) Bestimme die Menge von reellen Werten x so, dass $x^2 * x^2 \leq 4$.

III. THEMA

(30 Puncte)

1. Gegeben ist die Funktion $f: (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x - \frac{1}{2} \ln(x+2)$.
- 5p** a) Zeige, dass $f'(x) = \frac{(2x+3)(2x+5)}{2(x+2)}$, $x \in (-2, +\infty)$.
- 5p** b) Berechne $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 4x - f(x)}{x}$.
- 5p** c) Beweise, dass $x^2 + 4x + \frac{15}{4} \geq \frac{1}{2} \ln(2x+4)$, für jede $x \in (-2, +\infty)$.
2. Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \frac{2}{x^2 + 1}$.
- 5p** a) Zeige, dass $\int_0^3 (x^2 + 1) f(x) dx = 18$.
- 5p** b) Zeige, dass $\int_1^3 x f(x) dx = 4 + \ln 5$.

5p | c) Beweise, dass $F(x+1) \geq F(x)+1$, für jede reelle Zahl x , wobei F eine Stammfunktion von f ist.