Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

PRIMO QUESITO (30 punti)

5p **1.** Determinate il terzo termine della progressione geometrica $(b_n)_{n\geq 1}$, noto che $b_1=2$ e $b_2=6$.

5p **2.** Si considerano le funzioni $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+7$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-7$. Calcolate $(f\circ g)(7)$.

5p **3.** Risolvete nell'insieme dei numeri reali l'equazione $\sqrt{2x-1}=x-2$.

5p **4.** Calcolate la probabilità tale che, scegliendo un numero n dall'insieme dei numeri naturali di una cifra, esso verifichi la disugualianza $n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)>0$.

5p **5.** Nel riferimento cartesiano xOy si considerano i punti $A(1,1)$, $B(-1,0)$, $C(3,5)$ e $D(5,6)$. Dimostrate che i punti B, D ed il punto medio del segmento AC sono alineati.

5p **6.** Determinate $x\in(0,\pi)$, conoscendo che $(\sin x-\cos x)^2=2$.

SECONDO QUESITO (30 punti)

1. Si considerano le matrici $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ed $A(a)=\begin{pmatrix}1+2^a&2^a\\-2^a&1-2^a\end{pmatrix}$, con a numero reale.

5p **a)** Dimostrate che $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Dimostrate che $A(1)+A(2)-A(1)\cdot A(2)=I_2$.

5p **c)** Si considerano i numeri naturali m ed n, tali che $A(m)\cdot A(n)=A(m+n)$. Dimostrate che $m=n=1$.

2. Nell'insieme dei numeri reali è definita la legge di composizione $x*y=x^2+y^2+x+y$.

5p **a)** Dimostrate che $(-1)*(-1)=0$.

5p **b)** Dimostrate che $x*y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}$, per qualunque numeri reali x ed y.

5p **c)** Determinate l'insieme dei valori reali di x per i quali $x^2*x^2\leq 4$.

TERZO QUESITO (30 punti)

1. Si considera la funzione $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x-\frac{1}{2}\ln(x+2)$.

5p **a)** Dimostrate che $f'(x)=\frac{(2x+3)(2x+5)}{2(x+2)}$, $x\in(-2,+\infty)$.

5p **b)** Calcolate $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x-f(x)}{x}$.

5p **c)** Dimostrate che $x^2+4x+\frac{15}{4}\geq\frac{1}{2}\ln(2x+4)$, per qualunque $x\in(-2,+\infty)$.

2. Si considera la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\frac{2}{x^2+1}$.

5p **a)** Dimostrate che $\int_0^3(x^2+1)f(x)\,dx=18$.

5p **b)** Dimostrate che $\int_1^3 x f(x)\,dx=4+\ln 5$.

5p **c)** Dimostrate che $F(x+1)\geq F(x)+1$, per qualunque numero reale x, dove F è una primitiva di f.