Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

I. THEMA (30 Punkte)

5p **1.** Zeige, dass $3(4-i)+3i(1+i)=9$, wo $i^2=-1$.

5p **2.** Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4$. Berechne $(f\circ f)(2)$.

5p **3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $\log_3\left(x^2-2x+4\right)=1$.

5p **4.** Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine gewählte natürliche zweistellige Zahl durch 10 teilbar ist.

5p **5.** Gegeben sind die Punkte $A(2,4)$ und $B(3,a)$ in dem kartesischen Koordinatensystem xOy, wo a eine reelle Zahl ist. Bestimme die reelle Zahl a, wenn die Punkte O, A und B kollinear sind.

5p **6.** Gegeben ist $E(x)=\cos x+\cos 2x+\cos 3x$, wo x eine reelle Zahl ist. Zeige, dass $E\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$.

II. THEMA (30 Punkte)

1. Gegeben sind die Matrizen $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ und $A(x,y)=\begin{pmatrix}x+3y & 4y\\ -2y & x-3y\end{pmatrix}$, wo x und y reelle Zahlen sind.

5p **a)** Zeige, dass $\det(A(1,1))=0$.

5p **b)** Beweise: wenn die Matrix $A(x,y)$ umkehrbar ist, dann $|x|\neq|y|$.

5p **c)** Bestimme die Paare (m,n) von ganzen Zahlen so, dass $A(m,n)\cdot A(-m,n)=I_2$.

2. In der Menge $A=[0,+\infty)$ definiert man die Verknüpfung $x\circ y=4^{xy}-(1-x-y)$.

5p **a)** Zeige, dass $2\circ 0=2$.

5p **b)** Zeige, dass $x\circ\frac{1}{x}\geq 5$, für jedes $x\in A$, $x\neq 0$.

5p **c)** Beweise: wenn m und n natürliche ungerade Zahlen sind, dann ist $m\circ n$ eine natürliche ungerade Zahl.

III. THEMA (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Funktion $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3\ln x$.

5p **a)** Zeige, dass $f'(x)=\frac{3(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Bestimme die Gleichung der Tangenten an das Schaubild der Funktion f in dem Punkt mit der Abszisse $x=1$, der zum Schaubild der Funktion f gehört.

5p **c)** Beweise, dass $x^3\geq 3\ln x+1$, für jedes $x\in(0,+\infty)$.

2. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

5p **a)** Zeige, dass $\int_0^2\frac{f(x)}{e^x}dx=2$.

5p **b)** Zeige, dass $\int_{-1}^{1}\left(f(x)+e^x\right)dx=\frac{e^2+1}{e}$.

5p **c)** Beweise, dass $\int_{-1-a}^{-1+a}f(x)dx\geq-\frac{2a}{e}$, für jedes $a\in(0,+\infty)$.