

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Testul 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Határozza meg a $(b_n)_{n \geq 1}$ mértani haladvány ötödik tagjának a moduluszát tudva, hogy $b_1 = -1$ és $b_2 = 3$!
- 5p** 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2 + 7x + 9$ függvény. Határozza meg az x azon valós értékeinek a halmazát, melyekre $f(x) > 0$!
- 5p** 3. Oldja meg a valós számok halmazán a $\log_3(x-1) = \log_3(6-x) - 2$ egyenletet!
- 5p** 4. Határozza meg az n , $n \geq 2$ természetes számot, melyre $C_n^{n-2} - A_n^1 = 5$!
- 5p** 5. Az xOy koordináta rendszerben adott az $A(3, -1)$ pont, az m valós szám és a d egyenes, melynek egyenlete $y = (m-1)x - 2m$. Határozza meg az m valós számot, melyre az A pont távolsága a d egyenestől 0 lesz!
- 5p** 6. Határozza meg $\cos(\pi - 2x)$ értékét tudva, hogy x egy valós szám és $\cos x = \frac{2}{3}$!

SUBIECTUL AL II-LEA

(30 de puncte)

1. Adott az $A(a) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -a & 1 \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix}$ mátrix és az $\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ x - ay + z = 3 \\ 2x + ay - z = 2 \end{cases}$ egyenletrendszer, ahol a egy valós szám.
- 5p** a) Igazolja, hogy $\det(A(2)) = -3$!
- 5p** b) Határozza meg az a valós számokat, melyekre a $B(a) = A(a) \cdot A(a)$ mátrixnak két eleme 0!
- 5p** c) Ha $a = 1$ igazolja, hogy az egyenletrendszernek nincs megoldása!
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x * y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - xy$ műveletet.
- 5p** a) Igazolja, hogy $(-3) * 3 = 9$!
- 5p** b) Igazolja, hogy $x * y = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right)$, bármely x és y valós szám esetén!
- 5p** c) Határozza meg az x valós számot, melyre $2^x * 4^{x-1} = \frac{1}{4}$!

SUBIECTUL AL III-LEA

(30 de puncte)

1. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -1 + \frac{3}{x} - \frac{4\sqrt{x}}{x^2}$ függvény.
- 5p** a) Igazolja, hogy $f'(x) = \frac{3\sqrt{x}(2-\sqrt{x})}{x^3}$, $x \in (0, +\infty)$!
- 5p** b) Határozza meg az f függvény grafikus képéhez tartozó vízszintes aszimptota egyenletét $+\infty$ felé!
- 5p** c) Számítsa ki $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4^x \cdot f'(x)}{x-4}$!

2. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2xe^x - 2x + 1}{x}$ függvény.

5p a) Igazolja, hogy az $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \ln x + 2e^x - 2x + 2021$ függvény az f egy primitív függvénye!

5p b) Igazolja, hogy $\int_1^e f(x) dx = 2e^e - 4e + 3$!

5p c) Számítsa ki $\int_1^2 x f(x) dx$!