

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

Testul 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p** 1. Igazolja, hogy $\frac{1}{\sqrt{5}-2} - \sqrt{5} = 2$.
- 5p** 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 5x + 2$ függvény. Határozza meg az a valós számot, amelyre $f(a) = a$.
- 5p** 3. Oldja meg a valós számok halmazán a $3\log_4(3x+1) = 6$ egyenletet!
- 5p** 4. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ halmaz véletlenszerűen kiválasztott x elemére, az x^2 páratlan szám legyen!
- 5p** 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adott az $A(2, -1)$, a $B(4, 3)$ és a pont $C(a, b)$, ahol a és b valós számok. Határozza meg az a és b valós számokat, ha az A pont a BC szakasz felezőpontja!
- 5p** 6. Az A -ban derékszögű ABC háromszögben $AB = 9$ és $AC = 12$. Határozza meg az ABC háromszög A csúcsából húzott magasságának hosszát!

II. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ és az $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix.
- 5p** a) Igazolja, hogy $\det A = 2$.
- 5p** b) Igazolja, hogy $(A - 2I_2) \cdot (A - 4I_2) = 6I_2$.
- 5p** c) Határozza meg az $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixot, amelyre $A \cdot X = 3A + 4X$.
2. Az $M = (0, +\infty)$ halmazon értelmezzük az $x * y = xy - \frac{12}{x+y} + \frac{3}{x} + \frac{3}{y}$ műveletet.
- 5p** a) Igazolja, hogy $1 * 3 = 4$.
- 5p** b) Igazolja, hogy $x * x = x^2$, bármely $x \in M$.
- 5p** c) Határozza meg a nullától különböző n természetes számot, amelyre $(n * n) * (n * n) = 1$.

III. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{x^2 - 2x + 2}$ függvény.
- 5p** a) Igazolja, hogy $f'(x) = \frac{4(1-x)}{(x^2 - 2x + 2)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Határozza meg az f függvény grafikus képének az $x = 2$ abszcisszájú pontjába, az f függvény grafikus képéhez húzott érintő egyenletét!
- 5p** c) Határozza meg az a valós számot, amelyre $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0$.
2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2 + 1} + 1, & x \in (-\infty, 0] \\ e^x, & x \in (0, +\infty) \end{cases}$ függvény.
- 5p** a) Igazolja, hogy $\int_1^4 f(x) dx = e(e^3 - 1)$.

5p b) Számítsa ki: $\int_1^2 xf(x)dx$.

5p c) Határozza meg az a , $a > 0$ valós számot, amelyre $\int_{-a}^0 f(x)dx = a - \ln(a+1)$.