Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

I. FELADATSOR (30 pont)

5p **1.** Igazolja, hogy $\left(3+\lg\frac{1}{10}\right)\cdot\lg\sqrt{10}=1$.

5p **2.** Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax-1$ függvény, ahol a egy valós szám. Határozza meg azokat az a valós számokat, amelyekre $(f\circ f)(1)=1$.

5p **3.** Oldja meg a valós számok halmazán a $2^{x+1}\cdot 8^x=32$ egyenletet!

5p **4.** Határozza meg annak a valószínűségét, hogy ha a kétjegyű természetes számok halmazából kiválasztunk egy n számot, akkor a $\sqrt{n+100}$ szám egy természetes szám!

5p **5.** Az xOy derékszögű koordináta-renszerban adottak az $A(1,4)$, $B(4,6)$ és $C(4,2)$ pontok. Ha $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$, határozza meg a D pont koordinátáit!

5p **6.** Adott az $E(x)=\operatorname{tg}x-4\cos\frac{x}{2}\cdot\cos x$ kifejezés, ahol $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Igazolja, hogy $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$.

II. FELADATSOR (30 pont)

1. Adottak az $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ és $A(x)=\begin{pmatrix}1&-1&x\\-1&0&0\\x&0&-1\end{pmatrix}$, ahol x valós szám.

5p **a)** Igazolja, hogy $\det\left(A(0)\right)=1$.

5p **b)** Igazolja, hogy $\det\left(A(x)\cdot A(x)-I_3\right)\le 0$, bármely x valós szám esetén!

5p **c)** Adott a $B\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ mátrix. Határozza meg azt az $X\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ mátrixot, amelyre $X\cdot\left(A(0)\right)^{-1}=B\cdot A(0)$, ahol $\left(A(0)\right)^{-1}$ az $A(0)$ mátrix inverse!

2. Az $M=[0,+\infty)$ halmazon értelmezzük az $x*y=\frac{x^2+y^2+x+y}{x+y+1}$ műveletet.

5p **a)** Igazolja, hogy $1*2=2$.

5p **b)** Igazolja, hogy $e=0$ semleges elem a „$*$” műveletre nézve!

5p **c)** Határozza meg azokat az (m,n) természetes számokból álló számpárokat, amelyekre $m*n=5$.

III. FELADATSOR (30 pont)

1. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+6)\sqrt{x^2+4}$ függvény.

5p **a)** Igazolja, hogy $f'(x)=\frac{2\left(x^2+3x+2\right)}{\sqrt{x^2+4}}$, ahol $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Határozza meg az f függvény monotonitási intervallumait!

5p **c)** Bizonyítsa be, hogy az $f(x)=m$ egyenletnek egyetlen megoldása van bármely m egész szám esetén!

2. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$ függvény.

5p **a)** Igazolja, hogy $\int_0^4 e^x f(x)dx=12$.

5p **b)** Igazolja, hogy $\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{2e-3}{e}$.

5p **c)** Minden n, $n\geq 2$, természetes szám esetén tekintsük az $I_n=\int_0^1 \dfrac{x^{n-1}}{f\left(x^n\right)}dx$ számot. Bizonyítsa be, hogy $\dfrac{\ln 2}{n}\leq I_n\leq \dfrac{e-1}{n}$, bármely n, $n\geq 2$ természetes szám esetén!