

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timp de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 puncte)

- 5p 1. Calculați prima zecimală a numărului \sqrt{E} , unde $E = \frac{\log_2 8 + 4^{\log_4 9}}{\log_3(\log_2 512)}$.
- 5p 2. Să se determine numărul termenilor raționali din dezvoltarea: $(\sqrt{2} + \sqrt[3]{6})^{100}$
- 5p 3. Să se determine suma rădăcinilor ecuației: $x - \sqrt[3]{x-1} = 1$.
- 5p 4. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinați numărul de submultimi ale lui A care conțin cel puțin un număr par.
- 5p 5. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2; 0)$, $B(1; \sqrt{3})$ și $C(1; -\sqrt{3})$. Arătați că în triunghiul ABC, înălțimea și A și mediana din B se intersectează în $O(0; 0)$.
- 5p 6. Stiind că $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $\sin a + \cos a = 1$, arătați că $\left| \operatorname{tg} \left(a + \frac{\pi}{4} \right) \right| = 1$

SUBIECTUL al II-lea

(30 puncte)

- 5p 1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- 5p a) Arătați că $\operatorname{rang}(A^2 - A) = 0$
- 5p b) Rezolvați în $M_2(\mathbb{R})$ ecuația $X \cdot A = A \cdot X$.
- 5p c) Arătați că dacă $X \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X^{2024} = A$, atunci $X = A$ sau $X = -A$.
- 5p 2. Se consideră inelul claselor de resturi $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
- 5p a) Pentru $n = 6$, calculați suma soluțiilor ecuației $\hat{x}^3 = \hat{x}$ în \mathbb{Z}_6 .
- 5p b) Pentru $n = 8$, arătați că dacă $\hat{x} \in \mathbb{Z}_8$ astfel încât $\hat{x}^7 = \hat{1}$, atunci $\hat{x} = \hat{1}$.
- 5p c) Pentru $n = 10$, arătați că ecuația $\hat{x}^9 = \hat{x} + \hat{1}$ nu are soluții în \mathbb{Z}_{10} .

SUBIECTUL al III-lea

(30 puncte)

- 5p 1. Se consideră funcția $f : (-\infty, -2) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 2}$.
- 5p a) Arătați că f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, -2)$.
- 5p b) Determinați asimptotele graficului funcției f .
- 5p c) Arătați că $f(x) < e^x - 1$, $\forall x \in (-\infty, -2)$.

2. Fie șirul $(I_n)_{n \geq 0}$, definit prin $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + x + 1} dx$.

5p

a) Calculați I_0 .

5p

b) Arătați că șirul $(I_n)_{n \geq 0}$ este monoton și mărginit.

5p

c) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.