

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 pont)

- 5p** 1. Igazolja, hogy $2 - 5i + i(5 - 3i) = 5$, ahol $i^2 = -1$.
- 5p** 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 6x + m$ függvény, ahol m valós szám. Határozza meg azt az m valós számot, amelyre $f(2) = 15$.
- 5p** 3. Oldja meg a valós számok halmazán a $7^{2x+1} = 7^x \cdot 7^2$ egyenletet!
- 5p** 4. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a kétjegyű természetes számok halmazából véletlenszerűen kiválasztott számnak legalább egyik számjegye 1 legyen!
- 5p** 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(2,5)$ és $B(4,2)$ pontok. Határozza meg az A pont és az OB szakasz felezőpontja közötti távolságot!
- 5p** 6. Az A -ban derékszögű ABC háromszögben $AB = 5$ és $BC = 5\sqrt{5}$. Igazolja, hogy $\sin C = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

II. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adottak az $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ és $B(x) = \begin{pmatrix} x & x-3 \\ 3-x & x-4 \end{pmatrix}$ mátrixok, ahol x valós szám.
- 5p** a) Igazolja, hogy $\det A = 1$.
- 5p** b) Határozza meg azt az a valós számot, amelyre $B(4) \cdot B(4) + I_2 = aB(4)$.
- 5p** c) Határozza meg azt az x valós számot, amelyre $A \cdot B(x) = B(x) \cdot A$.
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x * y = (x + y)(4 - x - y)$ műveletet.
- 5p** a) Igazolja, hogy $0 * 3 = 3$.
- 5p** b) Határozza meg azokat az x valós számokat, amelyekre $x * 1 = 0$.
- 5p** c) Határozza meg azokat az n természetes számokat, amelyekre $N = (n + 5) * (n - 5)$ természetes szám!

III. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x - 2\ln(x + 1)$ függvény.
- 5p** a) Igazolja, hogy $f'(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x + 1}$, $x \in (-1, +\infty)$.
- 5p** b) Határozza meg az f függvény grafikus képének $x = 0$ abszcisszájú pontjában az f függvény grafikus képéhez húzott érintő egyenletét!
- 5p** c) Igazolja, hogy $x^2 - x \geq 2\ln \frac{x+1}{2}$, bármely $x \in (-1, +\infty)$ esetén!
2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x + 1$ függvény.
- 5p** a) Igazolja, hogy $\int_0^3 (f(x) - 3x) dx = 12$.
- 5p** b) Igazolja, hogy $\int_0^1 \frac{1}{(f(x) - x^2)^2} dx = \frac{1}{4}$.
- 5p** c) Igazolja, hogy a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x) - x^2 - 1}{e^x}$ függvény grafikus képe, az Ox tengely, valamint az $x = 0$ és $x = 1$ egyenletű egyenesek által közrezárt síkidom területe $3\left(1 - \frac{2}{e}\right)$.