

Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
Model februarie 2025
Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I
(30 puncte)

- 5p** 1. Determinați termenul b_5 al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_1 = 25$ și $b_3 = 225$.
- 5p** 2. Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - mx + 2 = 0$, unde m este număr real. Determinați valorile reale ale lui m pentru care $x_1^2 + x_2^2 < m + 2$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x+1} = 25^{\sqrt{x}}$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă exact două cifre egale.
- 5p** 5. Determinați numărul real a , pentru care vectorii $\vec{u} = (a+1)\vec{i} + 5\vec{j}$ și $\vec{v} = \vec{i} - (3-a)\vec{j}$ sunt coliniari.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 4$, $\sphericalangle A = 75^\circ$ și $\sphericalangle B = 30^\circ$. Arătați că raza cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu $2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$.

SUBIECTUL al II-lea
(30 puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a-1 & a \\ 1 & (a-1)^2 & a^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde a este un număr real.
- 5p** a) Calculați $\det(A(3))$.
- 5p** b) Determinați valorile numărului real a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.
- 5p** c) În reperul cartezian xOy se consideră punctele necoliniare $A(1,1)$, $B(a-1, (a-1)^2)$ și $C(a, a^2)$. Determinați valorile numărului real a pentru care aria triunghiului ABC este egală cu 1.
2. Pe mulțimea $M = [\sqrt{5}, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = \sqrt{x^2 y^2 - 5x^2 - 5y^2 + 30}$.
- 5p** a) Arătați că $x \circ y \in M$, pentru orice $x, y \in M$.
- 5p** b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție "o".
- 5p** c) Determinați numerele $x \in M$, pentru care $x \circ x \circ x \circ x = \sqrt{21}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 puncte)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x-1}$.

5p

a) Arătați că $f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}, x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

5p

b) Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f .

5p

c) Demonstrați că $\ln \frac{x-1}{y-1} \leq x-y$, pentru orice numere reale x, y cu $1 < x \leq y < 2$.

2. Se consideră funcția $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x-1 + \frac{2}{x+1}$.

5p

a) Arătați că $\int_1^3 \left(f(x) - \frac{2}{x+1} \right)^2 dx = \frac{8}{3}$.

5p

b) Arătați că $\int_0^1 xf'(x)dx = \ln \frac{e\sqrt{e}}{4}$.

5p

c) Demonstrați că $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(x+1)f(x)} \cdot \arctg^{2025} x dx = 0$.