Analiză combinatorie

1. Permutări

Definiția 1. O mulțime împreună cu o ordine bine determinată de dispunere a elementelor sale este o <u>*mulțime ordonată*</u> şi se notază $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Definiția 2. Se numesc <u>*permutări*</u> ale unei mulțimi A cu n elemente toate mulțimile ordonate care se pot forma cu cele n elemente. Numărul permutărilora n elemente, $n \in \mathbf{N}^*$, este $P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$; $0! = 1$ (prin definiție).

Factorial (proprietăți): $n! = (n-1)!n$; $n! = \dfrac{(n+1)!}{n+1}$

2. Aranjamente

Definiția 1. Se numesc <u>*aranjamente* a *n* elemente luate câte *m*</u> ($m \le n$) ale unei mulțimi A cu n elemente, toate submulțimile ordonate cu câte m elemente care se pot forma din cele n elemente ale mulțimii A. Se notează A_n^m.

Numărul aranjamentelor a n elemente luate câte m este:

$$A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!},\ n \ge m.$$

Proprietăți: $A_n^n = P_n$; $A_n^n = \dfrac{n!}{0!}$ sau $A_n^n = n!$; $A_n^{n-1} = A_n^n$; $A_n^0 = 1$.

3. Combinări

Definiția.1. Se numesc <u>combinări a *n* elemente luate câte *m*</u> ($m \le n$) ale unei mulțimi A cu n elemente toate submulțimile cu câte m elemente, care se pot forma din cele n elemente ale mulțimii A. Se notează C_n^m.

Proprietăți:

1. $C_n^1 = n$; $C_n^n = C_n^0 = C_0^0 = 1$; 2. $C_n^n = C_n^{n-m}$; **3**. $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$;
4. Numărul submulțimilor unei mulțimi cu n elemente este 2^n;
5. $C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^{m-1} + \ldots + C_{m+1}^{m-1} + C_m^{m-1} + C_{m-1}^{m-1}$;
6. $\dfrac{n!}{p_1!\,p_2!\ldots p_n!} = C_n^{p_1} C_{n-p_1}^{p_2} \ldots C_{n-(p_1+\ldots+p_{m-1})}$ unde $p_1 + \ldots p_{m-1} < n$

4. Binomul lui Newton

$(x+a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} a + \ldots + C_n^k x^{n-k} a^k + \ldots + C_n^n a^n$

$(x-a)^n = C_n^0 x^n - C_n^1 x^{n-1} a + \ldots + (-1)^k C_n^k x^{n-k} a^k + \ldots + (-1)^n C_n^n a^n$ unde $n \in \mathbf{N}$.

Proprietăți:

1. Termenul de rank $k+1$ este $T_{k+1} = (-1)^k C_n^k x^{n-k} a^k$;
2. $C_n^{k+1} = \dfrac{n-k}{k+1} C_n^k$; $C_{n+1}^{k+1} = \dfrac{n-k}{k+1} C_n^k$;
3. $T_{k+2} = \dfrac{n-k}{k+1} \cdot \dfrac{a}{x}\, T_{k+1}$ sau $T_{k+2} = -\dfrac{n-k}{k+1} \cdot \dfrac{a}{x}\, T_{k+1}$;
4. Numărul termenilor dezvoltării $(x \pm a)^n$ este $n+1$;
5. Coeficienții termenilor egal depărtați de extremi sunt egali.

Relații importante:

$$C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n; C_n^0 - C_n^1 + ... + (-1)^n C_n^n = 0;$$

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + ... = 2^{n-1}; C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + ... = 2^{n-1};$$

$$C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + ... + (C_n^n)^2$$

Dezvoltări particulare uzuale:

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$;
2. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$;
3. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
4. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
5. $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) + 6abc$;
6. $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

5. Suma puterilor asemenea ale primelor *n* numere naturale

Dacă $S_p = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p$, $p\in\mathbf{N}$, atunci avem:

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2};\ S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};\ S_3 = \left[\frac{n(n+1}{2}\right]^2$$

$$S_4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30};\ S_5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2 + 2n - 1)}{12}$$

O relație care permite calculul lui S_p, când se cunosc S_{p-1}, S_{p-2},…, S_1 este formula lui Pascal: $(n+a)^{p+1}$ $= 1 + C_{p+1}^1 S_p + C_{P+1}^2 S_{p-1} + ... + C_{p+1}^p S_1 + n$

Progresii

1. Progresii aritmetice

Definiția 1. Se numeşte <u>progresie aritmetică</u> un şir de numere $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots$ în care fiecare termen, începând cu a_2, se obține din cel precedent prin adăugarea unui număr constant numit <u>rația progresiei</u>. Se notează $\div a_1,a_2,a_3,\ldots a_n,\ldots$

Dacă a_1 este primul termen, a_n cel de-al n-lea termen (termenul general), r rația, n numărul termenilor şi S_n suma celor n termeni, atunci avem:

$a_n = a_{n-1} + r$, $n\geq 2$ (prin definiție)

$a_n = a_1 + (n - 1)r$, $n\geq 2$ (prin definiție)

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $\quad S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$, $\quad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2}n$

Termenii echidistanți de extremi. Într-o progresie aritmetică suma termenilor echidistanți de extremi este egală cu suma termenilor extremi: $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$.

Observație. Dacă numărul termenilor este impar ($n = 2m + 1$), atunci există un termen în mijloc, a_{m+1}, astfel încât $2a_{m+1} = a_1 + a_{2m+1}$.

Condiția necesară şi suficientă pentru ca trei termeni $a,b,c,$ luate în această ordine, să formeze o progresie aritmetică, este să avem $2b = a + c$.

2. Progresii geometrice

Definiția 1. Se numeşte <u>progresie geometrică</u> un şir de numere $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ în care fiecare termen, începând cu a_2, se obține din cel precedent prin înmulțirea acestuia cu un acelaşi număr q ($q \neq 0$) numit <u>rație</u>. Se notează $\div\div\, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$

Dacă a_1 este primul termen, a_n cel de-al n-lea termen (termenul general), q rația, n numărul termenilor şi S_n suma celor n termeni, atunci avem:

$a_n = q a_{n-1}$, $n \geq 2$ (prin definiție)

$a_n = a_1 q^{n-1}$, $n \geq 2$ (a_n în funcție de a_1, q şi n)

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $S_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$; $S_n = \dfrac{a_1 - a_n q}{1 - q}, q \neq 1$

Termeni echidistanți de extremi. Într-o progresie geometrică, produsul a doi termeni echidistanți de extremi este egal cu produsul termenilor extremi: $a_p a_{n-p+1} = a_1 a_n$.

Observație. Dacă numărul termenilor este impar ($n = 2m + 1$) atunci există un termen la mijloc, a_{m+1}, astfel încât $a_{m+1}^2 = a_1 a_{2m+1}$.

Condiția necesară şi suficientă ca trei numere a, b, c, luate în această ordine, să formeze o progresie geometrică este să avem $b^2 = ac$.

Probleme rezolvate

1. Se consideră dezvoltarea $\left(\frac{\sqrt{2^x}}{\sqrt[16]{8}}+\frac{\sqrt[16]{32}}{\sqrt{2^x}}\right)^n, n\in\mathbf{N}^*, x\in\mathbf{R}$.

a) Determinați n astfel încât $C_n^0, \frac{C_n^1}{2}, \frac{C_n^2}{4}$ să fie termeni succesivi ai unei progresii aritmetice.

b) Pentru n=8, verificați dacă există valori ale lui x astfel încât diferența dintre termenii al șaselea și al patrulea ai dezvoltării să fie 56.

R. 1) a) $C_n^0, \frac{C_n^1}{2}, \frac{C_n^2}{4}$ sunt termenii succesivi ai unei progresii aritmetice, atunci

$$\frac{1}{2}C_n^1=\frac{1}{2}\left(C_n^0+\frac{C_n^2}{4}\right)\Leftrightarrow \frac{1}{2}n=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}\frac{n(n+1)}{2}\right)\Leftrightarrow 8n=8+n^2-n$$

$n^2-9n+8=0\Rightarrow n=8$ (n=1 nu satisface).

b) Pentru n=8 $\Rightarrow$ $T_6-T_4=56$

$$C_8^5\left(\frac{2^{\frac{x}{2}}}{2^{\frac{3}{16}}}\right)^{8-5}\cdot\left(\frac{2^{\frac{5}{16}}}{2^{\frac{x}{2}}}\right)^5-C_8^3\left(\frac{2^{\frac{x}{2}}}{2^{\frac{3}{16}}}\right)^{8-3}\cdot\left(\frac{2^{\frac{5}{16}}}{2^{\frac{x}{2}}}\right)^3=56\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2}\cdot2^{\frac{3x}{2}-\frac{9}{16}+\frac{25}{16}-\frac{5x}{2}}-\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2}\cdot2^{\frac{5x}{2}-\frac{15}{16}+\frac{15}{16}-\frac{3x}{2}}=56\Leftrightarrow 2^{1-x}-2^x=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{2^x}-2^x=1\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2+2^x-2=0\Leftrightarrow 2^x=1,\ sau\ 2^x=-2$$

Soluția x=0 pentru că $2^x>0, \forall x\in\mathbf{R}$.

2. Se consideră dezvoltarea $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^n, x\in\mathrm{R}^*, n\in\mathbf{N}^*$.

a) Să se determine n astfel încât suma coeficienților primilor trei termeni ai dezvoltării să fie 97.

b) Pentru n=8, verificați dacă există un termen care conține pe x^4. Justificați răspunsul.

R. a) $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k$

$$C_n^0+C_n^1\cdot1\cdot(-2)+C_n^2\cdot1\cdot(-2)^2=97$$

Rezolvarea ecuației $1-2n+4\frac{n(n-1)}{2}=97\Rightarrow n=8\in\mathbf{N}$

b) Pentru n=8$\Rightarrow T_{k+1}=C_8^k\left(x^2\right)^{8-k}\left(-\frac{2}{x}\right)^k=C_8^k\cdot x^{2(8-k)}\cdot(-2)^k\cdot x^{-k}$

$2(8-k)-k=4\Rightarrow k=4\Rightarrow T_5$ conține pe x^4.

3. Se consideră a,b,c și x numere reale strict pozitive și diferite de 1.
Să se demonstreze că următoarea echivalență este adevărată: a,b,c sunt termenii succesivi ai unei progresii aritmetice dacă și numai dacă $\frac{1}{\log_a x}, \frac{1}{\log_b x}$, și $\frac{1}{\log_c x}$ sunt termeni succesivi ai unei progresii aritmetice.

R. Utililizând relația $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ obținem: $\frac{1}{\log_a x} = \log_x a$, $\frac{1}{\log_b x} = \log_x b$, $\frac{1}{\log_c x} = \log_x c$.

i) Presupunem a,b,c progresie geometrică, atunci $b^2=a\cdot c$ şi prin logaritmare în baza x avem:

$\log_x b^2 = \log_x (a\cdot c) \Leftrightarrow \log_x b = \frac{\log_x a + \log_x c}{2}$, deci este adevărată ii).

ii) Presupunem $\log_x b = \frac{\log_x a + \log_x c}{2} \Rightarrow 2\log_x b = \log_x (a\cdot c) \Rightarrow b^2 = a\cdot c$.

4. Se consideră dezvoltarea $\left(x + x^{\lg x}\right)^5$, $x \in \mathbf{R}$, $x > 0$.

Să se determine x, ştiind că al treilea termen al dezvoltării este 10^6

R. $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

$T_3 = T_{2+1} = C_5^2 x^3 \left(x^{\lg x}\right)^2 = 10x^{3+2\lg x}$

$x^{3+2\lg x} = 10^5 \Rightarrow \lg x^{3+2\lg x} = \lg 10^5 \Rightarrow (3+2\lg x)\cdot \lg x = 5$

$2\lg^2 x+3\lg x-5=0 \Rightarrow \lg x = -\frac{5}{2}, \lg x = 1$

$x_1 = 10^{-\frac{5}{2}}, \ x_2 = 10.$

4. Se consideră dezvoltarea: $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^n, x \in \mathbf{R}, x > 0, n \in \mathbf{R}^*, n \geq 2$.

a) Să se determine n astfel încât $C_n^2 = C_n^1 + 44$.

b) Pentru n=11, verificați dacă există un termen al dezvoltării care nu conține pe x. Justificați răspunsul.

R.) **a)** $C_n^2 = C_n^1 + 44 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = n + 44 \Rightarrow n = 11 \in \mathbf{N}$.

b) Pentru n=11 din $T_{k+1} = C_n^k \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{11-k} \left(x^{-4}\right)^k$ se obține $\frac{33-3k}{2} - 4k = 0$

cu k=3, deci $T_4 = C_{11}^4$ nu conține pe x.

6. Se consideră dezvoltarea $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n, n \in \mathbf{N}^*$.

a) Să se determine $n\in\mathbf{N}^*$, ştiind că suma primilor trei coeficienți ai dezvoltării este 46.

b) Pentru n=9, verificați dacă există un termen al dezvoltării care nu conține pe x.

R. a) $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$, deci coeficienții ceruți sunt $C_n^0, C_n^1 \, \text{şi} \, C_n^2$

Obținem ecuația $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 46 \Rightarrow 1 + n + \frac{n(n+1)}{2} = 46 \Rightarrow n = 9 \in \mathbf{N}$.

b) Pentru n=9, $T_{k+1} = C_9^k \left(x^2\right)^{9-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = C_9^k \cdot x^{18-2k-k}$, care nu conține pe x ⇔18 – 3k=0⇔k=6.

7. Se consideră dezvoltarea $\left(x\sqrt[4]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n, x \in \mathbf{R}, x > 0, n \in \mathbf{N}^*$.

a) Să se determine n astfel încât coeficientul binomial al termenului al treilea să fie 36.

b) Pentru n=9, verificați dacă există un termen al dezvoltării care conține pe x^3. Justificați răspunsul.

R.) **a)** $C_n^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 36 \Leftrightarrow n^2-n-72=0 \Rightarrow n_1=9$ şi $n_2=-8$ nu este soluție pentru că nu este număr natural.

b) $T_{k+1}=C_n^k\left(x\sqrt[4]{x}\right)^{9-k}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k=C_n^k x^{\frac{5(9-k)}{4}-\frac{k}{2}}$. Avem: $\frac{5(9-k)}{4}-\frac{k}{2}=3\Leftrightarrow$

45-5k-2k=12 ⇒ 7k=33 ⇒ $k=\frac{33}{7}\notin\mathbf{N}$, deci nu există termeni care să conțină pe x^3.

8. Se consideră dezvoltarea $\left(9x-\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{x}}\right)^n$, $x\in\mathbf{R}, x>0$ şi $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 3$.

a) Să se determine $n\in\mathbf{N}^*$, astfel încât coeficientul binomial al termenului al treilea să fie 105.
b) Pentru n=15, verificați dacă există un termen al dezvoltării care conține pe x^5. Justificați răspunsul.

R. a) Punem condiția: $C_n^2=105\ \Rightarrow n=15$

b) Folosind formula termenului general, obținem: $T_{k+1}=C_{15}^k\left(9x\right)^{15-k}\left(\frac{-\sqrt{3}}{3\sqrt{x}}\right)^k$ şi presupunând că există termenul care-l conține pe x^5 vom avea de determinat pe k din relația $15-k-\frac{k}{2}=5$, cu soluția $k=\frac{20}{3}$ care nu convine deoarece nu este număr natural. Deci nici un termen al dezvoltării nu-l conține pe x^5.

9. Se consideră dezvoltarea $\left(\sqrt{y}+\frac{1}{2\sqrt[4]{y}}\right)^n$, $y\in\mathbf{R}, y>0$ şi $\mathrm{n}\in\mathbf{N}^*$.

a) Să se determine n pentru care coeficienții termenilor 1, 2, respectiv 3 ai dezvoltării, formează o progresie aritmetică.
b) Pentru n=8, verificați dacă există termeni ai dezvoltării astfel încât puterea lui y să fie număr natural.

R. a) $\left(\sqrt{y}+\frac{1}{2\sqrt[4]{y}}\right)^n=C_n^0\left(\sqrt{y}\right)^n+C_n^1\cdot\left(\sqrt{y}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2\sqrt[4]{y}}+C_n^2\cdot\left(\sqrt{y}\right)^n\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt[4]{y}}\right)^2+\ldots$ şi

atunci $\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}C_n^1=C_n^0+\frac{1}{4}C_n^2\Rightarrow\frac{n!}{(n-1)!}=1+\frac{1}{4}\cdot\frac{n!}{2\cdot(n-2)!}\Rightarrow n=1+\frac{n(n-1)}{8}\Rightarrow$

$\Rightarrow n^2-9n+8=0$ cu soluțiile $n_1=1,\ n_2=8\Rightarrow$ n=8.

b) Pentru n=8 dezvoltarea va fi: $\left(\sqrt{y}+\frac{1}{2\sqrt[4]{y}}\right)^8$ şi termenul general:

$T_{k+1}=C_8^k\left(\sqrt{y}\right)^{8-k}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt[4]{y}}\right)^k=\frac{1}{2^k}\cdot C_8^k\cdot y^{\frac{8-k}{2}}\cdot y^{-\frac{k}{4}}=\frac{1}{2^k}\cdot C_8^k\cdot y^{\frac{16-2k-k}{4}}=\frac{1}{2^k}\cdot C_8^k\cdot y^{\frac{16-3k}{4}}$. Avem:

$\frac{16-3k}{4}\in\mathbf{N}$ pentru n=4 vom avea y^1 în termenul T_5.

10. Se consideră dezvoltarea $\left(\frac{1}{\sqrt[8]{x}}+x^{\lg x}\right)^n$, $n\in\mathbf{N}^*$, $x\in\mathbf{R}$, x>0.

a) Să se determine n dacă diferența dintre coeficientul binomial al celui de al treilea termen şi coeficientul binomial al celui de al doilea termen al dezvoltării este 27.
b) Pentru n=9, verificați dacă există valori ale lui x, astfel încât al doilea termen al dezvoltării să fie 900.

R. a) $C_n^2 - C_n^1 = 27 \Rightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} - \frac{n!}{1!(n-1)!} = 27 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} - n = 27 \Big| \cdot 2 \Rightarrow n^2 - 3n - 54 = 0$ cu soluțiile n_1=-6 şi n_2=9, atunci n=9.

b) Pentru n=9 dezvoltarea va fi: $\left(\frac{1}{\sqrt[8]{x}} + x^{\lg x}\right)^9 = C_9^0\left(\frac{1}{\sqrt[8]{x}}\right)^9 + C_9^1\left(\frac{1}{\sqrt[8]{x}}\right)^8 \cdot \left(x^{\lg x}\right) + \ldots$ şi termenul al doilea este $C_9^1\left(\frac{1}{\sqrt[8]{x}}\right)^8 \cdot \left(x^{\lg x}\right) = 9 \cdot \frac{1}{x} \cdot x^{\lg x} = 9x^{\lg x - 1} \Rightarrow 9x^{\lg x-1} = 900 \Rightarrow x^{\lg x-1} = 100$ şi logaritmăm ecuația $\Rightarrow$ $\lg\left(x^{\lg x-1}\right) = \lg 100 \Rightarrow (\lg x - 1)\lg x = 2 \Rightarrow \lg^2 x - \lg x - 2 = 0$. Notăm lg x=y şi obținem $y^2 - y - 2 = 0$, cu $y_1 = 1,\ y_2 = 2$. Revenim la notație, avem lg x=1 $\Rightarrow$ x_1=10 şi lg x=2 $\Rightarrow$ x_2=100.

11. În dezvoltarea binomului $\left(\sqrt{2^x} + \sqrt{2^{1-x}}\right)^n, n \in \mathbf{N}^*$, suma coeficienților ultimilor trei termeni este egală cu 22. Să se afle valorile lui x pentru care suma dintre termenii al treilea şi al cincilea este egală cu 135.

R. $\left(\sqrt{2^x} + \sqrt{2^{1-x}}\right)^n = C_n^0\left(\sqrt{2^x}\right)^n + C_n^1\left(\sqrt{2^x}\right)^{n-1} \cdot \sqrt{2^{1-x}} + \ldots + C_n^{n-2}\left(\sqrt{2^x}\right)^2\left(\sqrt{2^{1-x}}\right)^{n-2} +$

$+C_n^{n-1}\sqrt{2^x} \cdot \left(\sqrt{2^{1-x}}\right)^{n-1} + C_n^n\left(\sqrt{2^{1-x}}\right)^n$ şi obținem

$$C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n = 22 \Rightarrow \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} + \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} + \frac{n!}{n!} = 22 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} + n + 1 = 22 \Rightarrow$$

$n^2 + n - 42 = 0 \Rightarrow n_1 = 6,\ n_2 = -7$ şi atunci n=6, iar dezvoltarea va fi $\left(\sqrt{2^x} + \sqrt{2^{1-x}}\right)^6$.

$$T_3 + T_5 = C_6^2\left(\sqrt{2^x}\right)^4\left(\sqrt{2^{1-x}}\right)^2 + C_6^4\left(\sqrt{2^x}\right)^2\left(\sqrt{2^{1-x}}\right)^4 = \frac{\cancel{6!}^{5\cdot\cancel{6}}}{\cancel{2!} \cdot \cancel{4!}} \cdot 2^{2x} \cdot 2^{1-x} + \frac{\cancel{6!}^{5\cdot\cancel{6}}}{\cancel{4!} \cdot \cancel{2!}} 2^x \cdot 2^{2(1-x)} \Rightarrow$$

$15 \cdot 2^{x+1} + 15 \cdot 2^{2-x} = 135 \Big| : 15 \Rightarrow 2 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^{-x} = 9 \Big| \cdot 2^x \Rightarrow 2 \cdot \left(2^x\right)^2 + 4 = 9 \cdot 2^x$, notăm 2^x=y şi obținem:

$2y^2 - 9y + 4 = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2},\ y_2 = 4$.

Revenim la necunoscuta x: $2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = -1$ şi $2^x = 4 \Rightarrow x_2 = 2$.