Numere complexe

Definiţia 1. *Se numeşte **număr complex** orice element z=(a,b) al mulţimii* **R**x**R**=$\{(a,b)|\ a,b\in\mathbf{R}\}$***,*** *înzestrate cu două operaţii algebrice,* ***adunarea:*** $\forall z=(a,b)$ *şi* $z'=(a',b')\in\mathbf{R}\text{x}\mathbf{R}$, $z+z'=(a+a',\ b+b')$ *şi* ***înmulţirea:*** $\forall z=(a,b)$, $\forall z'=(a',b')\in\mathbf{R}\text{x}\mathbf{R}$, $z\cdot z'=(aa'-bb',\ ab'+a'b)$. ***Mulţimea numerelor complexe*** *se notează cu* **C** *şi este corp comutativ*, $\mathbf{C}=\{z=a+bi\ /\ a,b\in\mathbf{R},\ i^2=-1\}$.

1. Forma algebrică a numerelor complexe

$z = a + ib$, cu $a = (a,0)$, $b = (b,0)$ şi $i = (0,-1)$, respectiv $i^2 = -1$.

Egalitatea a două numere complexe *z* şi *z*':

$$a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a' \text{ şi } b = b'$$

Adunarea numerelor complexe

$z_1=a_1+b_1i,\ z_1=a_2+b_2i \Rightarrow z_1+z_2=a_1+a_2+(b_1+b_2)i.$

are proprietăţile:

- asociativă,
- comutativă,
- admite ca element neutru pe $0=0+0i$,
- orice număr complex $z= a + bi$ admite un opus $-z = -a - ib$.

Înmulţirea numerelor complexe

$z_1=a_1+b_1i,\ z_1=a_2+b_2i \Rightarrow z_1\cdot z_2=a_1\cdot a_2-b_1b_2+(a_1b_2+a_2b_1)i.$

are proprietăţile:

- asociativă,
- comutativă,
- admite ca element neutru pe $1=1+0\cdot i$,
- orice număr complex $z= a + bi$ nenul admite un invers $\left(z^{-1}=(a+bi)^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i\right)$,
- este distributivă faţă de adunare $z(z' + z'') = zz' + zz''\ \forall z,z',z''\in\mathbf{C}$.

Puterile numărului *i:* $\forall m\in\mathbf{N}$, $i^{4m} = 1$, $i^{4m+1} = i$, $i^{4m+2} = -1$, $i^{4m+3} = -i$.

Definiţia.2. *Dacă* ***z = a +bi****, atunci numărul* ***a – ib*** *se numeşte* ***conjugatul lui z*** *şi se notează* $a - ib = \overline{a+ib} = \overline{z}$.

Au loc următoarele proprietăţi, $\forall z, z'\in\mathbf{C}$.

1. $z + \overline{z} = 2a$;
2. $z - \overline{z} = 2bi$;
3. $\overline{z \pm z'} = \overline{z} \pm \overline{z'}$;
4. $\overline{zz'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$;
5. $z\overline{z} = a^2 + b^2 = (a+bi)(a-bi)$;
6. $\frac{z}{z'} = \frac{z'\overline{z}}{z\overline{z}}$;
7. $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$;
8. $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$.

2. Modulul unui numãr complex

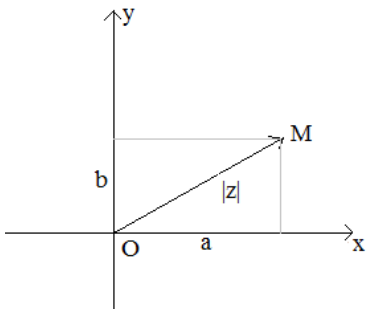
$\forall\ z\in$C, $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ sau $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

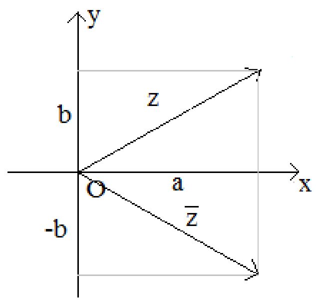
Avem apoi:

1. $|z| = |\overline{z}|$
2. $|z + z'| \le |z| + |z'|$;
3. $|z| - |z'| \le |z + z'| \le |z| + |z'|$;
4. $|zz'| = |z||z'|$;
5. $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}, |z| \ne 0$.

3. Reprezentarea geometricã a numerelor complexe

$z\in\mathbf{C}$, $z=a+bi$, $a,b\in\mathbf{R}$





4. Forma trigonometricã a numerelor complexe

$z = r(\cos u + i\sin u)$, unde $r = |z|$, iar unghiul $u\in[0,2\pi)$ este soluţia ecuaţiilor trigonometrice: $r\cos u = a$ şi $r\sin u = b$.

De exemplu: dacã $z = -1 - i$, atunci $|z| = \sqrt{2}$, $u = \frac{5\pi}{4}$ şi $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

5. Formula lui Moivre

$\forall u\in\mathbf{R}$ şi $\forall n\in\mathbf{N}$, $(\cos u + i\sin u)^n = \cos(nu) + i\sin(nu)$

Consecinţele formulei lui Moivre

$\cos nu = \cos^n u + C^2_n\cos^{n-2}u\sin^2 u + C^4_n\cos^{n-4}u\sin^4 u + \ldots$;

$\sin nu = C^1_n\cos^{n-1}u\sin u + C^3_n\cos^{n-3}u\sin^3 u + \ldots$;

$\mathrm{tg}\, nu = \frac{C_n^1 tgu - C_n^2 tg^3 u + C_n^5 tg^5 u - \ldots}{1 - C_n^2 tg^2 u + C_n^4 tg^4 u - \ldots}$.

6. Extragerea rãdãcinii de ordinul *n* dintr-un numãr complex

$$z = r(\cos u + i\sin u)$$

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{u+2k\pi}{n} + i\sin\frac{u+2k\pi}{n}\right], k = 0,1,2,...,n-1$$

$$\left(\sqrt[n]{1}\right)_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, k = 0,1,2,...,n-1$$

$$\left(\sqrt[n]{-1}\right)_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}, k = 0,1,2,...,n-1$$

$$\sqrt{a+ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$$

7. Ecuaţia binomã

$x^n - A = 0,\ A \in \mathbf{C}, A = r(\cos u + i\sin u)$

Pentru simplificare folosim urmãtoarea notaţie: $\left(\sqrt[n]{1}\right)_k = \varepsilon_k$ şi $\left(\sqrt[n]{-1}\right)_k = \omega_k$

$x_k = |A|^{1/n}\omega_k$, $k = \overline{0, n-1}$, $A \in \mathbf{R}$, $A < 0$;

$x_k = A^{1/n}\varepsilon_k$, $k = \overline{0, n-1}$, $A \in \mathbf{R}$, $A > 0$;

$x_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{u+2k\pi}{n} + i\sin\frac{u+2k\pi}{n}\right)$, $k = \overline{0, n-1}$, $A \in \mathbf{C}\setminus\mathbf{R}$

Probleme propuse

1. Să se determine x , y **R** ştiind că $x(1+2i)+y(2-i)=4+3i$.
2. Să se determine numerele complexe z , ştiind că $|z|=1$şi $(z-1)(\overline{z}+i)\in\mathbf{R}$.
3. Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $x^2-8x+25=0$.
4. Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $x^6-9x^3+8=0$.
5. Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $x^2-2x+4=0$.
6. Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $z^2=-9$.
7. Să se rezolve în **C** ecuaţia $z^2+3z+4=0$.
8. Să se rezolve în **C** ecuaţia $2\overline{z}+z=3+4i$.
9. Să se verifice că numărul $1+i$ este rădăcină a ecuaţiei $z^4+4=0$.
10. Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $z^3=\overline{z}$.
11. Să se rezolve în mulţimea numerelor complexe ecuaţia $z^5=\overline{z}$.
12. Să se calculeze $z+\frac{1}{z}$ pentru $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.
13. Ştiind că $z\in\mathbf{C}$ şi că $z^2+z+1=0$, să se calculeze $z^4+\frac{1}{z^4}$.
14. Ştiind că $z\in\mathbf{C}$ şi $z^2+z+1=0$, să se calculeze $z^{2008}+\frac{1}{z^{2008}}$.
15. Se consideră numărul complex $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Să se demonstreze că $z^2=\overline{z}$.
16. Să se calculeze $\frac{4+3i}{3-4i}-\frac{2+i}{1-2i}$.
17. Să se calculeze $\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}$.
18. Să se calculeze $1+i+i^2+...+i^{10}$.
19. Să se calculeze$(2+i)^3+(2-i)^3$.
20. Să se calculeze $(1-i)(1+2i)-3(2-i)$.
21. Să se calculeze $(2+i)^4+(2-i)^4$.
22. Să se calculeze $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{24}$.
23. Să se calculeze $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{24}$.

24. Să se calculeze $\left(\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}\right)^2$

25. Să se calculeze $\frac{1}{1+2i}+\frac{1}{1-2i}$.

26. Să se calculeze $1+i+i^2+...+i^{10}$.

27. Să se calculeze $\left(\frac{(1-2i)(3i-1)}{5}\right)^4$.

28. Să se arate că numărul $\frac{1+3i}{1-3i}+\frac{1-3i}{1+3i}$ este real.

29. Să se calculeze $(1-i)(1-i^2)(1-i^3)\ldots(1-i^{2008})$.

30. Să se calculeze $(2+i)(3-2i)-(1-2i)(2-i)$.

31. Să se calculeze $\frac{25}{4+3i}+\frac{25}{4-3i}$.

32. Să se calculeze $\frac{1+4i}{4+7i}+\frac{1-4i}{4-7i}$.

33. Să se calculeze $|5-12i|-|12+5i|$.

34. Să se determine numerele complexe z pentru care $z-1$, $2i$ şi $z+1$ sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

35. Să se determine $n\in\mathbf{Z}$ pentru care are loc egalitatea $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n+\left(1-i\sqrt{3}\right)^n=2^n$.

36. Să se determine partea imaginară a numărului $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$.

37. Să se calculeze modulul numărului complex $1+i+i^2+i^3+\ldots+i^6$.

38. Să se determine partea imaginară a numărului $\left(1+i\right)^{10}+\left(1-i\right)^{10}$.

39. Să se calculeze modulul numărului complex $z=(3+4i)^4$.

40. Se consideră $a\in\mathbf{R}$ şi numărul complex $z=\frac{a+2i}{2+ai}$. Să se determine a pentru care $z\in\mathbf{R}$.

41. Să se determine partea imaginară a numărului complex $z=\frac{1-i}{1+i}$.

42. Să se determine partea reală a numărului complex $\left(\sqrt{3}+i\right)^6$.

43. Să se calculeze modulul numărului complex $z=\frac{8+i}{7-4i}$.

44. Să se verifice egalitatea $\left(1+i\sqrt{3}\right)^2+\left(1-i\sqrt{3}\right)^2=-4$.

45. Să se calculeze modulul numărului complex $z = \dfrac{2-i}{2+i}$.

46. Fie $z \in$ **C** astfel încât $z + 2\overline{z} = 3 + i$. Să se calculeze modulul numărului z.

47. Fie z o rădăcină a ecuaţiei $z^2 + 2z + 4 = 0$. Să se calculeze modulul numărului complex z.

48. Să se calculeze modulul numărului complex $z = \left(\sqrt{2} - 1 + i\left(\sqrt{2} + 1\right)\right)^2$.

49. Să se determine numerele complexe z care verifică relaţia $z + 3i = 6 \cdot \overline{z}$.

50. Fie $z \in$ **C** o rădăcină de ordin 3 a unităţii, diferită de 1. Să se calculeze $1 + z + z^2$.

51. Fie $z \in$ **C**. Să se arate că $i\left(z - \overline{z}\right) \in \mathbf{R}$.

52. Fie $z \in$ **C**. Să se arate că dacă $2z + 3\overline{z} \in \mathbf{R}$, atunci $z \in$ **R**.

53. Să se arate că numărul $\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^{2008}$ este real.

54. Să se determine $z \in$ C ştiind că $\dfrac{\overline{z} + 7i}{z} = 6$.

55. Să se determine partea reală a numărului complex $\left(\sqrt{3} + 1\right)^6$.