Elemente de geometrie analiticã

1. Segmente

1. Distanţa dintre douã puncte A(x_1,y_1), B(x_2,y_2): AB = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
2. Panta dreptei AB: $m_{AB} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
3. Coordonatele (x,y) ale mijlocului segmentului AB: $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$
4. Coordonatele punctului M care împarte segmentul (AB) în raportul k:

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, y = \frac{y_1 + ky_2}{2}$$

2. Ecuaţia dreptei

1. Drepte paralele cu axele de coordonate:

   (d):x = a (d || Oy), (d):y = a (d || Ox)

2. Dreapta determinatã de punctul $M_o(x_o,y_o)$ şi vectorul nul $\overline{a}(u,v):(d):r = \overline{r_o} + t\overline{a}$, t∈R, $\overline{r_o}$ -vectorul de poziţie a lui M_o; r-vectorul de poziţie a unui punct M al dreptei d.

$$(d):\begin{cases} x = x_o + ut \\ y = y_o + vt \end{cases}$$, t∈R, ecuaţiile parametrice;

3. Ecuaţia explicitã: y =mx + n (m∈R*, n∈R, m – panta, n – ordonata la origine);
4. Ecuaţia prin tãieturi: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} - 1 = 0, (a, b \in R^*)$;
5. Ecuaţia dreptei de pantã m, prin punctul $M_o(x_o,y_o)$: $y - y_o = m(x - x_o)$, (m≠0);
6. Ecuaţia dreptei determinatã de punctele $A(x_1,y_2)$, $B(x_2,y_2)$:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \quad \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad (x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2) \text{ sau}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

7. Ecuaţia generalã: $ax + by + c = 0$;
8. Aria triunghiului ABC (A(x_1,y_1), B(x_2,y_2), C(x_3,y_3)): $A_{ABC} = \dfrac{1}{2}|\Delta|$, unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$, dacã Δ = 0 atunci A, B, C sunt colineare

9. Poziţia relativã a dreptelor (d_1) şi (d_2):

$$(d_1): a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ şi } (d_2): a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

$d_1 = d_2$, dacă $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$d_1 || d_2$, dacă $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$;

$d_1 \neq d_2$ şi $d_1 \cap d_2 \neq \emptyset$, dacă $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

10.Distanţa de la punctul $M_o(x_o,y_o)$ la dreapta (h): $ax + by + c = 0$

$$d(M,h) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

11.Unghiul α determinat de dreptele:

$(d_1): y = m_1x + n_1$ şi $(d_2): y = m_2x + n_2$

$$tg\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}, \quad (m_1m_2 \neq -1)$$

$d_1 \perp d_2$, dacă $m_1m_2 = -1$

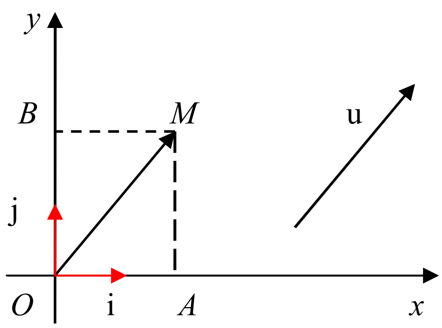
Vectori

Se numeste versor (notat $\vec{i}$) al dreptei d un vector de lungime 1 , care are direcţia dreptei d . Dacă A aparţine lui d îi asociem un număr real , unic x, numit coordonata sa . Atunci $OA=x\cdot\vec{i}$. Dacă $x>0$ atunci A este în sensul pozitiv al axei Ox . Dacă $x<0$ atunci A este în sensul negativ al axei Ox .

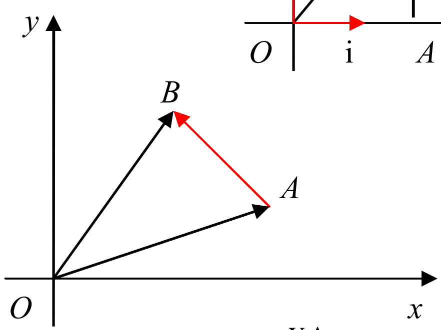
Fie Oxy un sistem de axe ortogonale .

Fie $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ versorii axelor Ox, respectiv Oy .

1. Fie $\vec{u}$ un vector în plan. Orice vector $\vec{u}$ poate fi scris în mod unic $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$;

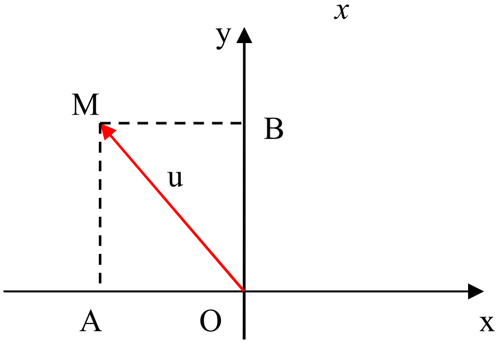


2. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$;



3. Modulul unui vector

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



4. Suma a doi vectori

$$\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$$

$$\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} \qquad \vec{u}+\vec{v} = (x_1+x_2)\vec{i} + (y_1+y_2)\vec{j}$$

5. Condiţia de paralelism

$$\vec{u} \parallel \vec{v} <=> \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}, \ pt.\ x_2, y_2 \ne 0$$

6. Condiţia de coliniaritate a 3 puncte

A,B,C – coliniare <=> $AB \| AC$ => $\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$

7. Conditia de perpendicularitate

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$$

8. Coordonatele mijlocului unui segment

Fie $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ şi $M(x_M,y_M)$ mijlocul segmentului $[AB]$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \ y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

9. Coordonatele centrului de greutate al unui Δ

Fie $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_C,y_C)$ şi $G(x_G,y_G)$ centrul de greutate al triunghiului ABC

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Probleme propuse

1. Fie punctele $A(2,-1)$ şi $B(-1,3)$. Să se determine numerele reale a şi b astfel încât $\overrightarrow{AB} = a\vec{i} + b\vec{j}$.
2. În reperul cartezian xOy se consideră punctele A(4,-8) şi B(6,3). Să se determine coordonatele $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.
3. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(2,-1)$ şi $B(1,-2)$.
4. Să se determine numărul real a ştiind că vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + a\vec{j}$ şi $\vec{v} = 3\vec{i} + (a-2)\vec{j}$ sunt coliniari.
5. În reperul cartezian $(O,\vec{i},\vec{j})$ se consideră vectorii $\vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ şi $\vec{v} = 5\vec{i} - \vec{j}$. Să se determine coordonatele vectorului $5\vec{u} + 3\vec{v}$.
6. Să se determine numărul real a ştiind că dreptele $2x-y+3=0$ şi $ax+2y+5=0$ sunt paralele.
7. Se consideră punctele $A(1,a)$, $B(2,-1)$, $C(3,2)$şi $D(1,-2)$. Să se determine numărul real a ştiind că dreptele AB şi CD sunt paralele.
8. Să se determine ecuaţia dreptei care conţine punctul A(1,1) şi este paralelă cu dreapta $4x+2y+5=0$.
9. Să se determine ecuaţia dreptei care conţine punctul $A(2,-3)$ şi este paralelă cu dreapta $x+2y+5=0$.
10. Să se calculeze aria triunghiului ABC determinat de punctele $A(1, 2)$, $B(-1,1)$, $C(3,5)$în reperul cartezian xOy.
11. Să se determine ecuaţia dreptei care conţine punctele $A(2,3)$şi $B(-3,-2)$.
12. Să se calculeze aria triunghiului echilateral ABC ştiind că $A(-1,1)$ şi $B(3,-2)$.
13. Să se calculeze lungimea segmentului AB, determinat de punctele $A(2,3)$ şi $B(5, -1)$, în reperul cartezian xOy.
14. Să se calculeze $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$, ştiind că A, B şi C sunt vârfurile unui triunghi.
15. Să se determine coordonatele punctului C ştiind că el este simetricul punctului $A(5,4)$ faţă de punctul $B(-2,1)$.
16. Se consideră triunghiul echilateral ABC înscris într-un cerc de centru O. Să se arate că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{O}$
17. În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{OA}(2,-3)$ şi $\overrightarrow{OB}(1,-2)$. Să se determine numerele reale α şi β pentru care vectorul $3\overrightarrow{OA} - 5\overrightarrow{OB}$ are coordonatele (α ,β).
18. Să se determine numărele reale a , ştiind că lungimea segmentului determinat de punctele $A(-1,2)$ şi $B(4-a,4+a)$ este egală cu 5.
19. Să se determine distanţa dintre punctele $A(3,-1)$ şi $B(-1,2)$.
20. Dacă $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0}$, să se determine valoarea raportului $\frac{AB}{BC}$.
21. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$şi $B(-1,2)$. Să se determine coordonatele punctului $C\in(AB)$ astfel încât $\frac{CA}{CB} = 2$.
22. Să se determine valorile reale ale lui m astfel încât punctele $A(1,3)$, $B(2,5)$ şi $C(3,m)$ să fie coliniare.

23. Să se determine coordonatele punctului B, ştiind că $C(3,5)$ este mijlocul segmentului AB şi că $A(2,4)$.
24. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(3,0)$ şi intersectează axa Oy în punctul de ordonată 4.
25. Să se determine lungimea înălţimii din O în triunghiul MON, unde $M(4,0)$,$N(0,3)$ şi $O(0,0)$.
26. Să se determine $m\in\mathbf{R}$ pentru care distanţa dintre punctele $A(2,m)$ şi $B(-m,-2)$ este egală cu $4\sqrt{2}$.
27. Să se determine $m\in\mathbf{R}$ pentru care punctele $A(2,4)$,$B(3,3)$ şi $C(m,5)$ sunt coliniare.
28. Se consideră reperul cartezian xOy şi punctele $A(1,-1)$ şi $B(3,5)$. Să se determine coordonatele punctului C din plan astfel încât $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$.
29. Se consideră dreptele distincte $d_1{:}ax+2y=2$ şi $d_2{:}8x+ay=4$. Să se determine valorile parametrului real a astfel încât dreptele d_1 şi d_2 să fie paralele.
30. Să se calculeze lungimea medianei din vârful A al triunghiului ABC ştiind că $A(2,3)$, $B(2,0)$ şi $C(0,2)$.
31. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(2,3)$. Ştiind că punctele B şi C sunt simetricele punctului A faţă de axele Ox, respectiv Oy, să se calculeze lungimea segmentului BC.
32. Să se calculeze distanţa de la punctul $A(-6,8)$ la originea reperului cartezian xOy.
33. Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, ştiind că punctele $A(a,b)$ şi $B(a-1, 4)$ aparţin dreptei de ecuaţie$x+y-5=0$.
34. Fie punctele distincte A,B,C,D nu toate coliniare. Ştiind că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$, să se demonstreze că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.
35. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(1,-1)$ şi este paralelă cu dreapta $y=x$.
36. Să se determine coordonatele punctului de intersecţie a dreptelor de ecuaţii $2x+y-4=0$ şi $x+y-3=0$.
37. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0;a)$, $B(-1;2)$ şi $C(4;5)$, unde a este un număr real. Să se determine valorile lui a pentru care triunghiul ABC este dreptunghic în A.
38. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,2)$ şi $B(4,4)$. Să se determine coordonatele mijlocului segmentului AB.
39. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(4;0)$ şi $B(0;2)$.
40. Să se determine lungimea medianei din A a triunghiului ABC, ştiind că vârfurile acestuia sunt $A(0;4)$, $B(-2;0)$ şi $C(8;0)$.
41. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(1,-2)$ şi are panta egală cu 2.
42. Să se determine coordonatele punctului M care aparţine dreptei AB şi care este egal depărtat de punctele $A(1;-1)$ şi $B(5;-3)$.
43. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,0)$, $B(x,y)$, $C(5,-2)$. Să se determine numerele reale x şi y astfel încât punctul B să fie mijlocul segmentului AC.
44. Să se demonstreze că, în hexagonal regulat $ABCDEF$, are loc relaţia $\overrightarrow{AD}=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF})$.
45. Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(2,1)$ şi $B(1,-2)$.

46. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,0)$ şi $B(m^2-1,0)$, cu $m\in\mathbf{R}$. Să se determine valorile reale ale lui m astfel încât punctul $C(5,0)$ să fie mijlocul segmentului AB.
47. Se consideră patrulaterul $ABCD$ în care $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Să se demonstreze că $ABCD$ este paralelogram.
48. În reperul cartezian xOy se consideră punctul N, simetricul punctului $M(-2,3)$ faţă de punctul O. Să se calculeze lungimea segmentului MN.
49. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(5,2)$ şi $C(3,-1)$. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.
50. Să se determine numărul real pozitiv a astfel încât distanţa dintre punctele $A(2,-1)$ şi $B(-1,a)$ să fie egală cu 5.