

Complemente teoretice

Limite de funcții

Notatii: $f: D \rightarrow \mathbf{R}$, $D \subset \mathbf{R}$, α - punct de acumulare a lui D ;

Definiții ale limitei

Definiția 1.1. $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l, l \in \overline{\mathbf{R}}$, dacă pentru orice vecinătate V a lui l există o vecinătate U a lui α astfel încât $\forall x \in D \cap U, x \neq \alpha$, să rezulte $f(x) \in V$.

Definiția 1.2. $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l, l \in \overline{\mathbf{R}}$, dacă pentru orice șir $(x_n)_{n \geq 0}, x_n \in D \setminus \{\alpha\}$, având $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ rezultă $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$ (criteriul cu șiruri);

Definiția 1.3. $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l, l \in \overline{\mathbf{R}}$, dacă $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât $\forall x \in D \setminus \{\alpha\}$ și $|x - \alpha| < \delta_\varepsilon$ rezultă $|f(x) - l| < \varepsilon$;

Definiția 1.4. $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l$, dacă $l_s = l_d = l$, unde $l_s = \lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ x < \alpha}} f(x)$ și $l_d = \lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ x > \alpha}} f(x)$.

Operații cu limite de funcții

$f: D \rightarrow \mathbf{R}, g: D \rightarrow \mathbf{R}, \alpha$ - punct de acumulare a lui D , $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = l_1, \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = l_2, l_1, l_2 \in \mathbf{R}$;

$$1. \lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) + g(x)) = l_1 + l_2;$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) \cdot g(x) = l_1 \cdot l_2;$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \alpha} a f(x) = a \cdot l_1;$$

$$4. \text{daca } l_2 \neq 0, \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}.$$

Limite tip

$$1. \lim_{x \rightarrow \alpha} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n) = a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_n$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_0 x^n;$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} = \frac{a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 \alpha^m + b_1 \alpha^{m-1} + \dots + b_m}$$

- $$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_0 x^n}{b_0 x^m};$$
3. $\lim_{x \rightarrow \alpha} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}, n \geq 2; \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty;$
4. $\lim_{x \rightarrow \alpha} a^x = a^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}; \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \text{dacă } a > 1;$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty, \text{dacă } 0 < a < 1;$
5. $\lim_{x \rightarrow \alpha} \log_a x = \log_a \alpha, \alpha > 0 \text{ finita}, \alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}; \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \log_a x = -\infty \text{ și } \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = +\infty \text{ dacă } a > 1;$
 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \log_a x = +\infty \text{ și } \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = -\infty \text{ dacă } 0 < a < 1;$
6. $\lim_{x \rightarrow \alpha} \sin x = \sin \alpha, \lim_{x \rightarrow \alpha} \cos x = \cos \alpha; \lim_{x \rightarrow \alpha} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha, \alpha \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}, \lim_{x \rightarrow \alpha} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} \alpha, \alpha \notin \pi\mathbb{Z};$
 $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = \infty, \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = -\infty; \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \operatorname{ctg} x = \infty, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \operatorname{ctg} x = -\infty;$
7. $\lim_{x \rightarrow \alpha} \arcsin x = \arcsin \alpha, \alpha \in [-1, 1], \lim_{x \rightarrow \alpha} \arccos x = \arccos \alpha, \alpha \in [-1, 1];$
 $\lim_{x \rightarrow \alpha} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow \alpha} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} \alpha, \alpha \in \mathbb{R}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2},$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi, \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arcctg} x = 0;$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1;$
9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{a^x} = 0, \forall n \in \mathbb{Z}, a > 1;$
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, a > 0,$
10. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e;$
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^r - 1}{x} = r, \forall r \in \mathbb{R}.$
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$

Continuitatea funcțiilor

Definiția 1. Fie $f: D \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in D, x_0$ – punct de acumulare a lui D, f este **continuă** în x_0 , dacă $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, iar x_0 se numește **punct de continuitate**.

Definiția 2. Fie $\alpha \in D, \alpha$ este **punct de discontinuitate de prima speță** dacă există și sunt finite limitele laterale în α , dar funcția nu este continuă în α .

Definiția 3. Fie $\alpha \in D, \alpha$ este **punct de discontinuitate de speța a doua** dacă nu este de prima speță.

Teoremă. Dacă $f: I \rightarrow \mathbb{R}, I$ – interval și f continuă pe I , atunci $J = f(I)$ este interval (o funcție continuă pe un interval are proprietatea lui Darboux pe acel interval).

Funcții derivabile

Definiția derivatei într-un punct

$f: E \rightarrow \mathbf{R}$, $x_0 \in E$, x_0 – punct de acumulare a lui E :

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \text{ există și este finită}$$

$$\triangleright f'_s(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\triangleright f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

\triangleright o funcție este derivabilă într-un punct $x_0 \Leftrightarrow f'(x_0) = f'_s(x_0) = f'_d(x_0)$

Interpretarea geometrică:

- dacă $f'(x_0) \in \mathbf{R}$, atunci aceasta reprezintă **panta tangentei** la graficul funcției în punctul x_0 , $m = f'(x_0)$.
- dacă $f'(x_0) \in \mathbf{R}$, $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ este **ecuația tangentei** la graficul funcției f în punctul $A(x_0, f(x_0))$;
- dacă f este continuă în x_0 , $f'_d(x_0) = +\infty$, $f'_s(x_0) = -\infty$, sau invers, x_0 este **punct de întoarcere** al graficului;
- dacă f este continuă în x_0 și există derivatele laterale în x_0 , cel puțin una fiind finită, dar f nu este derivabilă în x_0 , x_0 este **punct unghiular** al graficului.

Reguli de derivare

$f, g: E \rightarrow \mathbf{R}$, f, g derivabile în $x \in E$:

$$1. (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x);$$

$$2. (cf)'(x) = cf'(x), c \in \mathbf{R};$$

$$3. (f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$4. \text{dacă } g(x) \neq 0, \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)};$$

5. **derivata funcției compuse:** dacă $f: I \rightarrow J$, $g: J \rightarrow \mathbf{R}$, f derivabilă în $x_0 \in I$ și g derivabilă în $y_0 = f(x_0)$, atunci $(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$;

6. **derivate funcției inverse:** dacă $f: I \rightarrow J$ continuă, bijectivă și derivabilă în x_0 cu

$$f'(x_0) \neq 0, \text{ atunci } f^{-1}: J \rightarrow I \text{ este derivabilă în } y_0 = f(x_0) \text{ și } f^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Definiție: Punctele critice ale unei funcții derivabile sunt rădăcinile (zerourile) derivatei întâi.

Derivate de ordin superior

Fie $f: I \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $x_0 \in I$, o funcție derivabilă. Spunem că f este de două ori derivabilă în x_0 dacă există și este finită:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0)$$

Derivatele funcțiilor elementare

Funcția (condiții)	Derivata (condiții)
c , (constanta)	0
x^n , $n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}
x^r , $r \in \mathbb{R}$, $x > 0$	rx^{r-1}
\sqrt{x} , $x \geq 0$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$
$\log_a x$, $a \neq 1$, $a > 0$, $x > 0$	$\frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$
$\ln x$, $x > 0$	$\frac{1}{x}$
a^x , $a \neq 1$, $a > 0$, $x > 0$	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$, $x \in [-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$
$\arccos x$, $x \in [-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Derivatele funcțiilor compuse

Funcția (condiții)	Derivata (condiții)
u^n , $n \in \mathbb{N}^*$	$nu^{n-1} \cdot u'$
u^r , $r \in \mathbb{R}$, $u > 0$	$ux^{r-1} \cdot u'$
\sqrt{u} , $u \geq 0$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$, $u > 0$
$\log_a u$, $a \neq 1$, $a > 0$, $u > 0$	$\frac{1}{\ln a} \cdot \frac{u'}{u}$
$\ln u$, $u > 0$	$\frac{1}{u} \cdot u'$
a^u , $a \neq 1$, $a > 0$	$a^u \ln a \cdot u'$
e^u	$e^u \cdot u'$
$\sin u$	$\cos u \cdot u'$
$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$
$\operatorname{tg} u$, $\cos u \neq 0$	$\frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$\operatorname{ctg} u$, $\sin u \neq 0$	$-\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$\arcsin u$, $u \in [-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$, $u \in (-1, 1)$
$\arccos u$, $u \in [-1, 1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$, $u \in (-1, 1)$
$\operatorname{arctg} u$	$\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$\operatorname{arcctg} u$	$-\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Proprietăți ale funcțiilor derivabile

Definiție: Fie $f:I \rightarrow \mathbf{R}$, cu $I \subset \mathbf{R}$, interval.

1. Spunem că punctul $x_0 \in I$ este un **punct de maxim local** strict pentru f , dacă există o vecinătate U a lui x_0 , astfel încât: $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in U \cap (I \setminus \{x_0\})$.

2. Spunem că punctul $x_0 \in I$ este un **punct de minim local** strict pentru f , dacă există o vecinătate U a lui x_0 , astfel încât: $f(x) > f(x_0)$, $\forall x \in U \cap (I \setminus \{x_0\})$.

Teorema lui Fermat:

Fie $f:I \rightarrow \mathbf{R}$ derivabilă pe I . În orice punct extrem local din interiorul lui I , f' este nulă.

Teorema lui Rolle:

Dacă funcția continuă $f:[a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ este derivabilă pe (a,b) și $f(a) = f(b)$ atunci există $c \in (a,b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Teorema lui Lagrange:

Dacă funcția continuă $f:[a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ este derivabilă pe (a,b) , atunci există $c \in (a,b)$ astfel încât $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.

Consecințe ale Teoremei lui Lagrange:

- Fie $f:E \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție derivabilă și $I \subset E$ un interval.
 - Dacă $\forall x \in I$, avem $f'(x) > 0$, atunci funcția este strict crescătoare pe I .
 - Dacă $\forall x \in I$, avem $f'(x) < 0$, atunci funcția este strict descrescătoare pe I .
- Fie $f:(a,b) \rightarrow \mathbf{R}$ o funcție derivabilă și $c \in (a,b)$. Dacă f' se anulează în c schimbându-și semnul, atunci c este un punct de extrem local pentru f .

Teoremă. Dacă funcția f este continuă și derivabilă pe I (I – interval deschis), atunci:

- între două rădăcini consecutive ale funcției există cel puțin o rădăcină a derivatei;
- între două rădăcini consecutive ale derivatei există cel mult o rădăcină a funcției.

Teorema lui Cauchy:

Dacă $f, g:[a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ continue pe $[a,b]$, derivabile pe (a,b) și $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$ atunci $\exists c \in (a,b)$ astfel încât $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

Funcții convexe și funcții concave

- O funcție este convexă pe un interval real (a,b) , dacă pentru $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ graficul funcției pe intervalul (x_1, x_2) este situat sub segmentul de dreaptă care unește punctele $(x_1, f(x_1))$ și $(x_2, f(x_2))$.
- O funcție este concavă pe un interval real (a,b) , dacă pentru $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ graficul funcției pe intervalul (x_1, x_2) este situat deasupra segmentului de dreaptă care unește punctele $(x_1, f(x_1))$ și $(x_2, f(x_2))$.

Propoziția

- Dacă funcția f are derivată de ordinul al doilea strict pozitivă ($f''(x) > 0$) pe intervalul (a,b) , atunci f este strict convexă pe (a,b) .
- Dacă funcția f are derivată de ordinul al doilea strict negativă ($f''(x) < 0$) pe intervalul (a,b) , atunci f este strict concavă pe (a,b) .

Asimptote

1. Asimptote orizontale ($f:D \rightarrow \mathbf{R}$)

Definiția 1. Dacă $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l_1$ sau $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l_2$, $l_1 \in \mathbf{R}$ și/sau $l_2 \in \mathbf{R}$, dreptele $y=l_1$ și/sau $y=l_2$ sunt **asimptote orizontale** a lui f spre $+\infty$, respectiv $-\infty$

2. Asimptote oblice ($f:D \rightarrow \mathbf{R}$)

Definiția 2. Dacă $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = n$, $m, n \in \mathbf{R}$ dreapta $y=mx+n$ este **asimptotă oblică** a lui f spre $+\infty$.

Definiția 3. Dacă $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m' \neq 0$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - m'x] = n'$, $m', n' \in \mathbf{R}$ dreapta $y=m'x+n'$ este **asimptotă oblică** a lui f spre $-\infty$.

3. Asimptote verticale ($f:D \rightarrow \mathbf{R}$)

Definiția 4. Dacă $\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ x < \alpha}} f(x) = \pm\infty$, α - punct de acumulare a lui D , dreapta $x=\alpha$ este **asimptotă verticală la stânga** a lui f .

Definiția 5. Dacă $\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ x > \alpha}} f(x) = \pm\infty$, α - punct de acumulare a lui D , dreapta $x=\alpha$ este **asimptotă verticală la dreapta** a lui f .

Regulile lui l'Hospital

Fie I un interval pe axa reală și x_0 un punct de acumulare al lui I . Fie f și g două funcții definite pe $I - \{x_0\}$. Dacă:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$;
2. f și g sunt derivabile pe $I - \{x_0\}$;
3. $g'(x_0) \neq 0$, $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$;
4. există $\frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g'(x)} = l, l \in \mathbf{R}$, atunci

- a) $g(x) \neq 0, \forall x \in I \setminus \{x_0\}$ și
- b) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$.

Probleme rezolvate

1. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

- a) Să se calculeze derivata funcției f .
- b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .
- c) Să se demonstreze că $f(x) \leq -4$ pentru orice $x < -1$.

R. a) Funcția este derivabilă pe domeniul de definiție deoarece este o funcție rațională. Folosind formula de derivare a unui cât de funcții derivabile, pentru orice $x \neq -1$ avem

$$f'(x) = \frac{(x^2)' \cdot (x+1) - x^2 \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}.$$

b) Monotonia funcției f este dată de semnul derivatei f' . Cum numitorul $(x+1)^2$ este pozitiv pentru orice x din domeniu, semnul lui $f'(x)$ este dat de semnul funcției de gradul doi $x^2 + 2x$.

Rezolvăm ecuația $x^2 + 2x = 0$, $x(x+2) = 0$ și găsim rădăcinile $x_1 = -2$ și $x_2 = 0$. Tabelul de semn al derivatei:

x	$-\infty$					-2		-1			0				$+\infty$					
x^2+2x	+	+	+	+	+	+	0	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+
$(x+1)^2$	+	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	+	+	+	+	0	-	-	/	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+
$f(x)$						\longrightarrow <i>Max</i> \longleftarrow														

- pe intervalul $(-4; -2)$, avem $x^2+2x > 0$, deci $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(-4; -2]$.
- pe intervalul $(-2; -1)$, avem $x^2 + 2x < 0$, deci $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $[-2; -1)$.
- pe intervalul $(-1; 0)$, avem $x^2 + 2x < 0$, deci $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-1; 0]$.
- pe intervalul $(0; +4)$, avem $x^2 + 2x > 0$, deci $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $[0; +4)$.
- c)** Conform punctului **b)**, f în intervalul $(-4; -1)$ are un maxim, punctul $x = -2$. Deci $f(x) \leq f(-2) = -4$, pentru orice $x < -1$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = e^x - e^{-x}$.

- a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.
- b) Să se arate că funcția f este crescătoare pe \mathbf{R} .
- c) Să se calculeze $S = g(0) + g(1) + \dots + g(2008)$, unde $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = f'(x) - f''(x)$.

R. a) Punctul $x_0 = 0$ este punct de acumulare pentru \mathbf{R} și limita este

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$. Calculăm $f'(x) = e^x + e^{-x}$, unde

$(e^{-x})' = e^{-x} \cdot (-x)' = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}$ după formula de derivare $(e^u)' = e^u \cdot u'$ și

$$f'(0) = e^0 + e^0 = 1 + 1 = 2, \text{ deci } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 2.$$

b) În $f'(x) = e^x + e^{-x}$ avem e^x și e^{-x} sunt strict pozitive $\forall x \in \mathbf{R}$, atunci și suma lor $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$ și funcția este crescătoare pe domeniul de definiție, \mathbf{R} .

c) Deoarece $f''(x) = e^x - e^{-x}$, avem $g(x) = f'(x) - f''(x) = 2e^{-x}$. Atunci suma S din enunț este suma primilor 2009 termeni ai unei progresii geometrice de prim termen $g(0) = 2e^{-0} = 2$ și

rație $e^{-1} < 1$, $\left(S_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \right)$. Deci, $S = g(0) + g(1) + \dots + g(2008) =$

$$= 2 + 2e^{-1} + 2e^{-2} + \dots + 2e^{-2008} = 2 \cdot \frac{1 - e^{-2009}}{1 - e^{-1}} = \frac{2(e^{2009} - 1)}{e^{2008}(e - 1)}.$$

3. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

a) Să se calculeze derivata funcției f .

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .

c) Să se demonstreze că $3^{\sqrt{5}} < 5^{\sqrt{3}}$.

R.a) Folosind formula de derivare a unui cât, avem:

$$f'(x) = \frac{(\ln x)' \cdot \sqrt{x} - \ln x \cdot (\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}.$$

b) Determinăm punctele critice: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$; $x \in (0, +\infty) \Rightarrow x > 0$ și $\sqrt{x} > 0$

Tabelul de semn:

x	0			e^2			$+\infty$		
$2 - \ln x$	+	+	+	0	-	-	-	-	-
$2x\sqrt{x}$	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-	-	-

Pe intervalul $(0, e^2)$, $f'(x) > 0$, atunci f este funcție strict crescătoare pe acest interval.

Pe intervalul $(e^2, +\infty)$, $f'(x) < 0$, atunci f este funcție strict descrescătoare pe acest interval.

c) Din $e \approx 2,71 \Rightarrow e^2 > 2,7^2 = 7,29$ și atunci $0 < 3 < 5 < e^2$, adică 3 și $5 \in (0, e^2)$, interval pe care

funcția este strict crescătoare (punctual **b**). Avem: $3 < 5 \Rightarrow f(3) < f(5) \Rightarrow \frac{\ln 3}{\sqrt{3}} < \frac{\ln 5}{\sqrt{5}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{5} \ln 3 < \sqrt{3} \ln 5 \Rightarrow \ln 3^{\sqrt{5}} < \ln 5^{\sqrt{3}}$ și funcția logaritm natural fiind strict crescătoare se păstrează inegalitatea și între argumente, adică $3^{\sqrt{5}} < 5^{\sqrt{3}}$.

4. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x + e^{-x}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

b) Să se arate că f este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și crescătoare pe $[0, +\infty)$.

c) Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f .

R. a) Folosind regula de derivare a sumei obținem $f'(x)=1-e^{-x}$.

b) Pentru determinarea monotoniei folosim semnul derivatei întâi. Pentru tabelul de semn al derivatei determinăm punctele critice: $f'(x)=0 \Rightarrow 1-e^{-x}=0 \Rightarrow e^{-x}=1 \Rightarrow x=0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-----	- 0 + + + + + + +	

Pe intervalul $(-\infty,0]$, $f'(x)<0 \Rightarrow f$ este funcție descrescătoare pe $(-\infty,0]$;

Pe intervalul $[0,+\infty)$, $f'(x)>0 \Rightarrow f$ este funcție crescătoare pe $[0,+\infty)$.

c) Dacă $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0, m \in \mathbf{R}$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = n, n \in \mathbf{R}$ dreapta $y = mx + n$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției.

Calculăm $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)^{\text{regula lui l'Hospital}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-e^{-x}}{1} = 1$ și

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^{-x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0.$$

Ecuția asimptotei oblice: $y=1 \cdot x+0 \Rightarrow y=x$ (prima bisectoare).

5. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^{2009} - 2009(x-1) - 1$.

a) Să se calculeze $f(0) + f'(0)$.

b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=0$.

c) Să se arate că funcția f este convexă pe $[0;+\infty)$.

R.a) Calculăm $f'(x)=2009x^{2008}-2009; f(0)=0^{2009}-2009(0-1)-1=2009-1=2008$ și $f'(0)=2009 \cdot 0^{2008}-2009=-2009$. Răspunsul $f(0)+f'(0)=2008-2009=-1$

b) Ecuația tangentei la graficul funcției este $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, unde $x_0=0, f(x_0)=f(0)=2008$ și $f'(0)=2008 \cdot 0^{2007}-2008=-2008$. Prin înlocuire se obține: $y - 2008 = -2008(x-0) \Rightarrow y = -2008x+2008$.

c) Calculăm derivata a doua $f''(x)=(f'(x))'=(2009x^{2008}-2009)'=2009 \cdot 2008x^{2007}$.

Deoarece $x^{2007} \geq 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f''(x) \geq 0$ și atunci f este convexă pe \mathbf{R} .

6. Se consideră funcția $f: [0,+\infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2}$.

a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Să se verifice că $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2}$, oricare ar fi $x \geq 0$.

c) Să se demonstreze că $\frac{1}{2} \leq f(x) < 2$ pentru orice $x \in [0,+\infty)$.

R.a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1 + 1 = 2$

b) Aplicăm regula de derivare a sumei și câtului și avem:

$$f'(x) = \frac{x' \cdot (x+1) - x \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} + \frac{(x+1)' \cdot (x+2) - (x+1) \cdot (x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} + \frac{1 \cdot (x+2) - (x+1) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} + \frac{x+2-x-1}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2}$$

c) Pentru demonstrarea inegalității utilizăm monotonia funcției. Monotonia se stabilește cu ajutorul primei derivate. Se observă că $f'(x) > 0$ ca sumă de pătrate, $\forall x \in [0, +\infty]$ și atunci funcția este crescătoare pe domeniul de definiție, adică

$$0 \leq x < +\infty \Rightarrow f(0) \leq f(x) < \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x). \text{ Calculăm } f(0) = \frac{0}{0+1} + \frac{0+1}{0+2} = \frac{1}{2} \text{ și din punctul a)}$$

$$\text{avem } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2. \text{ Înlocuind se obține } \frac{1}{2} \leq f(x) < 2.$$

7. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = e^x + x^2$.

a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

b) Să se demonstreze că funcția f nu are asimptotă către $+\infty$.

c) Să se demonstreze că funcția f este convexă pe \mathbf{R} .

R. a) Din definiția derivatei funcției în punctul de acumulare $x_0=1$ se obține

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1). \text{ Calculăm } f'(x) = e^x + 2x \text{ și } f'(1) = e^1 + 2 \cdot 1 = e + 2. \text{ Se obține}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = e + 2.$$

b) Către $+\infty$ funcția poate să aibă asimptotă orizontală sau oblică.

Verificăm asimptota orizontală:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = \infty + \infty = \infty \Rightarrow \text{nu are asimptotă orizontală.}$$

Verificăm asimptota oblică:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x + x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} x = \infty + \infty = \infty \Rightarrow \text{nu are asimptota oblică.}$$

c) Pentru determinarea convexității ne folosim de derivata de ordinul II.

$$f''(x) = (f'(x))' = (e^x + 2x)' = (e^x)' + (2x)' = e^x + 2. \text{ Din } e^x > 0, \forall x \in \mathbf{R}, \text{ obținem } f''(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R} \text{ și } \Rightarrow \text{funcția este convexă pe } \mathbf{R}.$$

8. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \setminus \{e\} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$.

a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

b) Să se verifice că $f'(x) = \frac{2}{x(1 - \ln x)^2}, \forall x \in (0, \infty) \setminus \{e\}$.

c) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f .

R. a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \frac{1 + \ln 1}{1 - \ln 1} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1.$

b) Avem: $f'(x) = \frac{(1 + \ln x)' \cdot (1 - \ln x) - (1 + \ln x) \cdot (1 - \ln x)'}{(1 - \ln x)^2} =$
 $= \frac{\left(0 + \frac{1}{x}\right) \cdot (1 + \ln x) - (1 + \ln x) \cdot \left(0 - \frac{1}{x}\right)}{(1 - \ln x)^2} =$

$$= \frac{\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}}{(1 - \ln x)^2} = \frac{\frac{2}{x}}{(1 - \ln x)^2} = \frac{2}{x(1 - \ln x)^2}.$$

c) Calculăm $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{l'Hospital} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln x)'}{(1 - \ln x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x}} = -1$ și

obținem asimptota orizontală, dreapta $y = -1$.

9. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = e^x(ax^2 + bx + c)$, unde $a, b, c \in \mathbf{R}$.

a) Pentru $a=1, b=c=0$, să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Să se verifice că $f'(0) - f(0) = b$.

c) Să se determine $a, b, c \in \mathbf{R}$, astfel încât $f(0) = 0, f'(0) = 1$ și $f''(0) = 4$.

R. a) Pentru $a=1, b=c=0$, $f(x) = e^x x^2$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x x^2 = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty$.

b) Calculăm:

$$f'(x) = (e^x)'(ax^2 + bx + c) + e^x(ax^2 + bx + c)' = e^x(ax^2 + bx + c) + e^x(2ax + b) = e^x(ax^2 + bx + c + 2ax + b) = e^x[ax^2 + x(2a + b) + b + c]$$

$$f(0) = e^0(a \cdot 0 + b \cdot 0 + c) = 1 \cdot c = c \text{ și } f'(0) = e^0[a \cdot 0 + 0 \cdot (2a + b) + b + c] = b + c.$$

Obținem: $f'(0) - f(0) = b + c - c = b$.

c) Calculăm $f''(x) = [e^x(ax^2 + bx + c + 2ax + b)]' = (e^x)'(ax^2 + bx + c + 2ax + b) + e^x(ax^2 + bx + c + 2ax + b)'$

$$= e^x(ax^2 + bx + c + 2ax + b) + e^x(2ax + b + 2a) = e^x(ax^2 + 4ax + bx + 2a + 2b + c) \text{ și}$$

$$f(0) = e^0(a \cdot 0 + b \cdot 0 + c) = c; f'(0) = b + c; f''(0) = 2a + 2b + c. \text{ Obținem sistemul:}$$

$$\begin{cases} c = 0 \\ b + c = 1 \\ 2a + 2b + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b + 0 = 1 \\ 2a + 2 + 0 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 1 \\ 2a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 1 \\ a = 1 \end{cases} \text{ cu soluția } a=b=1 \text{ și } c=0.$$

10. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \geq 1 \\ -x^2 + x, & x < 1 \end{cases}$

a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 1$.

b) Să se calculeze $f'(0) + f'(2)$.

c) Să se demonstreze că funcția f este concavă pe $(-\infty, 1)$.

R. a) Folosim definiția funcției continue și calculăm limitele laterale în punctul $x_0 = 1$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} (-x^2 + x) = -1^2 + 1 = -1 + 1 = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x^2 - x) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\text{și } f(0) = 1^2 - 1 = 0.$$

Din $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = f(1) = 0$ rezultă că funcția este continuă în $x_0 = 1$.

b) Calculăm $f'(x) = \begin{cases} 2x-1, & x > 1 \\ -2x+1, & x < 1 \end{cases}$, f este derivabilă pe $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

$f'(0) = -2 \cdot 0 + 1 = 1$ și $f'(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$. Obținem: $f'(0) + f'(2) = 1 + 3 = 4$.

c) Calculăm derivata a doua a funcției pe intervalul $(-\infty, 1)$. $f''(x) = (-2x + 1)' = -2 < 0$ și funcția este concavă pe $(-\infty, 1)$.

11. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}$.

a) Să se verifice că $f'(x) = -\frac{2}{x^3} - \frac{2}{(x+1)^3}$, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$.

b) Să se demonstreze că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.

c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 f'(x)$.

R. a) Derivăm fiecare fracție:

$$f'(x) = \frac{1' \cdot x^2 - 1 \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} + \frac{1' \cdot (x+1)^2 - 1 \cdot [(x+1)^2]'}{[(x+1)^2]^2} = \frac{0 \cdot x^2 - 1 \cdot 2x}{x^4} +$$

$$+ \frac{0 \cdot (x+1)^2 - 1 \cdot 2(x+1)(x+1)'}{(x+1)^4} = \frac{-2x}{x^4} + \frac{-2(x+1) \cdot 1}{(x+1)^4} = -\frac{2}{x^3} - \frac{2}{(x+1)^3}$$

b) Pentru determinarea monotoniei funcției determinăm semnul derivatei:

$$x \in (0, +\infty) \Rightarrow \begin{cases} x^3 > 0 \Rightarrow \frac{2}{x^3} > 0 \Rightarrow -\frac{2}{x^3} < 0 \\ (x+1)^3 > 0 \Rightarrow -\frac{2}{(x+1)^3} < 0 \end{cases}$$

și atunci $f''(x) < 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$, rezultă că f este strict descrescătoare pe $(0, +\infty)$.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(-\frac{2}{x^3} - \frac{2}{(x+1)^3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2x^3}{x^3} - \frac{2x^3}{(x+1)^3} \right) =$

$$= -2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} = -2 - 2 = -4$$

12. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = x - 2 \ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, +\infty)$.

b) Să se demonstreze că funcția f este convexă pe intervalul $(0, +\infty)$.

c) Să se demonstreze că $f(x) \geq \ln \frac{e^2}{4}$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

R. a) $f'(x) = x' - 2(\ln x)' = 1 - 2 \cdot \frac{1}{x} = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$.

b) Pentru stabilirea convexității determinăm semnul derivatei a II-a.

$$f''(x) = \left(1 - \frac{2}{x} \right)' = 1' - 2 \cdot \left(\frac{1}{x} \right)' = 0 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \frac{2}{x^2}$$

, care evident este pozitivă pe domeniul de definiție. Din $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ este convexă pe $(0, +\infty)$.

c) Pentru demonstrarea inegalității stabilim monotonia funcției.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow \frac{2}{x} = 1 \Rightarrow x = 2, \text{ punct critic.}$$

Tabelul de semn al derivatei:

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

Pe $(0;2]$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ este funcție descrescătoare, iar pe $[2, +\infty)$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ este funcție crescătoare, atunci $x = 2$ este punct de minim local $\Rightarrow f(x) \geq f(2)$. Calculăm

$$f(2) = 2 - 2 \ln 2 = 2 \cdot \ln e - \ln 2^2 = \ln e^2 - \ln 4 = \ln \frac{e^2}{4}, \text{ obținem: } f(x) \geq \ln \frac{e^2}{4}.$$

13. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$.

a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$ oricare ar fi $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

b) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f .

c) Să se demonstreze că $f(x) \geq 1$, pentru orice $x > -1$.

R. a) Calculăm derivata după regula de derivare a funcției cât.

$$f'(x) = \frac{(e^x)'(x+1) - e^x(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{e^x(x+1) - e^x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{e^x(x+1-1)}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}.$$

b) Calculăm $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}(x+1)} = \frac{1}{+\infty \cdot -\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$ și atunci dreapta

$y=0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$.

c) Pentru demonstrarea inegalității ne folosim de monotonia funcției f care este dată de semnul derivatei f' . Determinăm punctele critice, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ și tabelul de semn al derivatei pe intervalul $(-1, +\infty)$

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

Pe intervalul $(-1, 0]$, $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ este funcție descrescătoare, iar pe $[0, +\infty)$, $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ este funcție crescătoare, atunci $x=0$ este punct de minim local $\Rightarrow f(x) \geq f(0)$. Calculăm

$$f(0) = \frac{e^0}{0+1} = \frac{1}{1} = 1 \text{ și se obține inegalitatea cerută, } f(x) \geq 1.$$

14. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

a) Să se calculeze $f'(e)$.

b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ a graficului funcției f .

c) Să se demonstreze că $x^e \leq e^x$ pentru orice $x > 0$.

R. a) Calculăm derivata funcției $f'(x) = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

iar $f'(e) = \frac{1 - \ln e}{e^2} = \frac{1 - 1}{e^2} = \frac{0}{e^2} = 0.$

b) Calculăm $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{l'Hospital} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$ și

atunci dreapta $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

c) Pentru demonstrarea inegalității ne folosim de monotonia funcției f care este dată de semnul funcției f' . Determinăm punctele critice, $f'(x)=0 \Rightarrow 1-\ln x=0 \Rightarrow \ln x=1 \Rightarrow x=e$ și tabelul de semn al derivatei pe intervalul $(0, +\infty)$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	+++++	0	-----

Pe intervalul $(0, e], f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ este funcție crescătoare, iar pe $[e, +\infty), f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ este funcție descrescătoare, atunci $x = e$ este punct de maxim local

$\Rightarrow f(x) \leq f(e) \Rightarrow \frac{\ln x}{x} \leq \frac{\ln e}{e} \Rightarrow e \ln x \leq x \ln e \Rightarrow \ln x^e \leq \ln e^x \Rightarrow x^e \leq e^x$ pentru orice $x > 0$.

15. Se consideră funcțiile $f_n: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, date prin $f_0(x) = e^{-x} - 1$ și $f_{n+1}(x) = f'_n(x)$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

a) Să calculeze $f_1(x), x \in \mathbf{R}$.

b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ a graficului funcției f_0 .

c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_2(x) + x - 1}{x^2}$.

R. a) Determinăm $f_1(x)$ pentru $n=0$:

$f_1(x) = f'_0(x) = (e^{-x} - 1)' = (e^{-x})' - 1' = (-x)' \cdot e^{-x} - 0 = -1 \cdot e^{-x} = -e^{-x}$.

b) Calculăm $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} - 1 = \frac{1}{+\infty} - 1 = 0 - 1 = -1$ și obținem

asimptota orizontală dreapta $y = -1$.

c) Calculăm mai întâi, pentru $n=1$,

$f_2(x) = f'_1(x) = (-e^{-x})' = (-x)' \cdot (-e^{-x}) = -1 \cdot (-e^{-x}) = e^{-x}$ și

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_2(x) + x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right)^{l'Hospital} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{-x} + x - 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^{-x} + 1}{2x} =$
 $= \left(\frac{0}{0}\right)^{l'Hospital} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-e^{-x} + 1)'}{(2x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}}{2} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$.

16. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ de forma $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0 \\ x^2 + x + a, & x \geq 0 \end{cases}$, unde $a \in \mathbf{R}$.

a) Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât funcția f să fie continuă în punctul $x_0 = 0$.

b) Să se scrie ecuația tangentei la graficul funcției în punctul de abscisă -1 .

c) Să se arate că funcția f' este crescătoare pe $(0; +\infty)$, oricare ar fi $a \in \mathbf{R}$.

R. a) Calculăm limitele laterale în x_0 :

$l_s(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$

$$l_d(0) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x^2 + x + a) = 0^2 + 0 + a = a$$

Pentru ca funcția să fie continuă în $x_0=0$ trebuie ca $l_s(0)=l_d(0) \Rightarrow a=0$.

b) Ecuația tangentei la graficul funcției este $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, unde $x_0 = -1 < 0$ și

funcția este $f(x) = e^x - 1$. Calculăm $f(-1) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1$, $f'(x) = (e^x - 1)' = (e^x)' - 1' = e^x$,

$$f'(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e}, \text{ înlocuim și se obține: } y - \left(\frac{1}{e} - 1\right) = \frac{1}{e}(x + 1) \Rightarrow y - \frac{1}{e} + 1 = \frac{(x + 1)}{e} \cdot e \Rightarrow$$

$$ye - 1 + e = x + 1 \Rightarrow t: x - ye + 2 - e = 0.$$

c) Pe $(0; +\infty)$, $f(x) = x^2 + x + a$ și funcția f' este crescătoare dacă f'' este pozitivă.

Calculăm $f'(x) = 2x + 1$ și $f''(x) = 2 > 0, \forall a \in \mathbf{R}$, atunci funcția f' este funcție crescătoare. (Sau $f'(x) = 2x + 1$, funcție de gradul I, cu coeficientul lui x egal cu $2 > 0$ și atunci este crescătoare).

17. Se consideră funcția $f: \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$.

a) Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbf{R}^*$.

b) Să se demonstreze că funcția f este descrescătoare pe $(0, 2]$.

c) Să se arate că $2e^{\sqrt{3}} \leq 3e^{\sqrt{2}}$.

R. a) Derivăm după cât :

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x^2}\right)' = \frac{(e^x)' \cdot x^2 - e^x \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{e^x \cdot x \cdot (x - 2)}{x^4} = \frac{e^x(x - 2)}{x^3}.$$

b) Determinăm semnul derivatei pe intervalul $(0, 2]$: $x > 0 \Rightarrow e^x > 0, x^3 > 0$ și $x - 2 \leq 0$ atunci $f'(x) \leq 0$ și $\Rightarrow f$ este funcție descrescătoare.

c) Pentru demonstrarea inegalității ne folosim de punctual **b)**. Funcția este descrescătoare, adică $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$. Din intervalul $(0, 2]$ luăm numerele $\sqrt{2} \leq \sqrt{3}$ și obținem:

$$\frac{e^{\sqrt{2}}}{2} \geq \frac{e^{\sqrt{3}}}{3} \Rightarrow 2e^{\sqrt{3}} \leq 3e^{\sqrt{2}}.$$

18. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = (x + 1)^2 + (x - 1)^2$.

a) Să se verifice că $f'(x) = 4x$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2}$.

c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$.

R. a) Ridicăm la putere: $f(x) = x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1 = 2x^2 + 2$ și apoi derivăm $f'(x) = 2 \cdot 2x + 0 = 4x$.

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{2}{x^2}\right) = 2 + 0 = 2.$$

c) Determinăm $g(x) = \frac{4x}{2x^2 + 2}$ și calculăm derivata

$$g'(x) = \left(\frac{4x}{2x^2 + 2} \right)' = \frac{(4x)'(2x^2 + 2) - 4x(2x^2 + 2)'}{(2x^2 + 2)^2} = \frac{4(2x^2 + 2) - 4x \cdot 4x}{(2x^2 + 2)^2} = \frac{8x^2 + 8 - 16x^2}{(2x^2 + 2)^2} = \frac{-8x^2 + 8}{(2x^2 + 2)^2} = \frac{-8(x^2 - 1)}{(2x^2 + 2)^2}$$

Punctele critice: $g'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$, tabel de

semn:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$g'(x)$	-----	0	+++++	0	-----

Pe $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, $g'(x) \leq 0 \Rightarrow g$ este descrescătoare, iar pe $[-1, 1]$ $g'(x) \geq 0$ și g este crescătoare.

19. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

c) Să se demonstreze că $0 < f(x) \leq \frac{1}{2e}$ pentru orice $x \in [\sqrt{e}, +\infty)$.

R. a) Folosim regula de derivare a câtului

$$f'(x) = \frac{(\ln x)' \cdot x^2 - \ln x \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x - 2x \cdot \ln x}{x^4} = \frac{x(1 - 2 \ln x)}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)' \stackrel{\text{Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{\infty} = 0$

c) Determinăm monotonia funcției f . Aflăm punctele critice: $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} = 0 \Rightarrow 1 - 2 \ln x = 0 \Rightarrow 2 \ln x = 1 \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

Tabelul de semn

x	0	\sqrt{e}	$+\infty$
$f'(x)$	+++++	0	-----

Obținem: f este descrescătoare pe intervalul $[\sqrt{e}, +\infty)$, adică $\sqrt{e} \leq x < +\infty \Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) < f(x) \leq f(\sqrt{e}) \Rightarrow 0 < f(x) \leq \frac{1}{2e}, \text{ unde } f(\sqrt{e}) = \frac{\ln \sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2} = \frac{\ln e^{\frac{1}{2}}}{e} = \frac{\frac{1}{2} \ln e}{e} = \frac{1}{2e}$$

20. Se consideră funcția $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x + 2}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in [0, 1]$.

b) Să se arate că f este funcție crescătoare pe $[0, 1]$.

c) Să se demonstreze că $\frac{3}{e} \leq \frac{1}{f(x)} \leq 2$, pentru orice $x \in [0, 1]$.

R. a) Calculăm după regula de derivare a câtului

$$f'(x) = \frac{(e^x)' \cdot (x+2) - e^x \cdot (x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{e^x \cdot (x+2) - e^x \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{e^x \cdot (x+2-1)}{(x+2)^2} = \frac{e^x \cdot (x+1)}{(x+2)^2}.$$

b). Determinăm monotonia funcției pe intervalul $[0, 1]$. Se observă că $f'(x) \geq 0$ deoarece sunt numai valori pozitive și atunci funcția este crescătoare pe $[0, 1]$.

c) Conform definiției monotoniei funcției, avem: $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(1)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{e}{3} \text{ și inversând rapoartele se obține } \frac{3}{e} \leq \frac{1}{f(x)} \leq 2, \forall x \in [0, 1].$$

21. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$.

a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$, pentru orice $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

b) Să se determine ecuația asimptotei oblice către $+\infty$ la graficul funcției f .

c) Să se arate că $f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) \geq 8$, oricare ar fi $x > 1$.

R. a) Calculăm după regula de derivare a câtului

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2 + x + 2)' \cdot (x - 1) - (x^2 + x + 2) \cdot (x - 1)'}{(x - 1)^2} = \frac{(2x + 1) \cdot (x - 1) - (x^2 + x + 2) \cdot 1}{(x - 1)^2} = \\ &= \frac{2x^2 - 2x + x - 1 - x^2 - x - 2}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}. \end{aligned}$$

b) Deoarece gradul numărătorului este 2 iar gradul numitorului 1, funcția nu are asimptotă orizontală și atunci poate avea asimptotă oblică de forma $y = mx + n$, unde

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 + x + 2}{x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - x} = 1, \text{ deoarece numărătorul și numitorul au grade egale, iar}$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + x + 2}{x - 1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 2 - x \cdot (x - 1)}{x - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 2 - x^2 + x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 2}{x - 1} = 2. \end{aligned}$$

Asimptota oblică va avea forma $y = x + 2$.

c) Notăm $h: (1, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$,

$$h(x) = f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1} - \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 2}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1} - \frac{2x^2 + x + 1}{x(x - 1)} =$$

$$= \frac{x^3 + x^2 + 2x + 2x^2 + x^2 + 1}{x(x-1)} = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x(x-1)} = \frac{(x+1)^3}{x^2 - x} \text{ și calculăm}$$

$$h'(x) = \frac{\left[(x+1)^3 \right]' (x^2 - x) - (x+1)^3 (x^2 - x)'}{(x^2 - x)^2} = \frac{3(x+1)^2 (x^2 - x) - (x+1)^3 (2x - 1)}{(x^2 - x)^2} =$$

$$= \frac{(x+1)^2 (3x^2 - 3x - 2x^2 - 2x + x + 1)}{(x^2 - x)^2} = \frac{(x+1)^2 (x^2 - 4x + 1)}{(x^2 - x^2)}. \text{ Determinăm punctele}$$

critice pe intervalul $(1, +\infty)$: $h(x) = 0 \Rightarrow$

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4 = 12, \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}, x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}. \text{ Dintre acestea } x_2 = 2 + \sqrt{3} > 1$$

și tabelul de semn:

x	1	$2 + \sqrt{3}$	$+\infty$
$h'(x)$	-----	0	+++++

Punctul $x = 2 + \sqrt{3}$ este punct de minim local,

$$h(x) \geq h(2 + \sqrt{3}) = \frac{(2 + \sqrt{3} + 1)^3}{(2 + \sqrt{3})^2 - 2 - \sqrt{3}} = \frac{(3 + \sqrt{3})^3}{4 + 4\sqrt{3} + 3 - 2 - \sqrt{3}} = \frac{27 + 27\sqrt{3} + 27 + 3\sqrt{3}}{5 + 3\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{54 + 30\sqrt{3}}{5 + 3\sqrt{3}} = \frac{6(9 + 5\sqrt{3})(5 - 3\sqrt{3})}{25 - 27} = \frac{\cancel{6}^3 (45 - 27\sqrt{3} + 25\sqrt{3} - 45)}{-\cancel{2}^2} = 6\sqrt{3} \geq 8, \text{ adică}$$

$$h(x) \geq 8 \Rightarrow f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) \geq 8.$$

22. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x - e \ln x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x \in (0, \infty)$.

b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x)}{f'(x)}$.

c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .

R.a) $f'(x) = x' - (e \ln x)' = 1 - e(\ln x)' = 1 - e \cdot \frac{1}{x} = \frac{x - e}{x}$.

b) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x)}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{x - e \ln x}{\frac{x - e}{x}} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{x^2 - ex \ln x}{x - e} = \left(\frac{0}{0}\right)^{\text{L'Hospital}} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{(x^2 - ex \ln x)'}{(x - e)'}$

$$= \lim_{x \rightarrow e} \frac{(x^2)' - e(x \ln x)'}{x' - e'} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{2x - e[x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)']}{1 - 0} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{2x - e\left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right)}{1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow e} \frac{2x - (e \ln x + e)}{1} = 2e - e \ln e - e = 2e - e - e = 0.$$

c) Determinăm punctele critice, $f'(x) = 0, \frac{x - e}{x} = 0 \Rightarrow x - e = 0 \Rightarrow x = e$ și tabelul de semn

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	- - - - -	0	+ + + + +

Pe $(0, e]$, $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ este funcție descrescătoare, iar pe $[e, +\infty)$, $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ este funcție crescătoare.

23. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$.

- a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.
- b) Să se determine punctele de extrem ale funcției f .
- c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{f'(x)}{f(x)} - 1 \right)$.

R. a) Se calculează derivata după regula produsului

$$f'(x) = (x^2 - 2x + 1)' \cdot e^x + (x^2 - 2x + 1) \cdot (e^x)' = (2x - 2) \cdot e^x + (x^2 - 2x + 1) \cdot (e^x) = (2x - 2 + x^2 - 2x + 1) \cdot e^x = (x^2 - 1) \cdot e^x.$$

b) Determinăm punctele critice, $f'(x) = 0$ și din tabelul de semn aflăm punctele de extrem.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$$

x	$-\infty$	-1	+1	$+\infty$
$f'(x)$	+ + + + +	0	- - - - -	0 + + + + +

Pe $(+\infty, -1]$, $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ este funcție crescătoare, iar pe $[-1, +1]$, $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ este funcție descrescătoare și atunci $x = -1$ punct de maxim local. Pe $[-1, +1]$, $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ este funcție descrescătoare, iar pe $[+1, +\infty)$, $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ este funcție crescătoare și atunci $x = +1$ este punct de minim local. Funcția are două puncte de extreme local, $x = -1$ și $x = +1$.

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{f'(x)}{f(x)} - 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{(x^2 - 1)e^x}{(x^2 - 2x + 1)e^x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{x^2 - 1 - x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2x + 1} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x}{x^2 - 2x + 1} = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sau } \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{f'(x)}{f(x)} - 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{(x-1)(x+1) \cdot e^x}{(x-1)^2 \cdot e^x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{x+1}{x-1} - 1 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{x+1 - x+1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{2}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x-1} = 2. \end{aligned}$$

24. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, definită prin $f(x) = \frac{x^4}{4} - \ln x$.

- a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.
- b) Să se determine punctele de extrem ale funcției f .
- c) Să se demonstreze că $\ln \sqrt{x} \leq \frac{x^2 - 1}{4}$ pentru orice $x \in (0, +\infty)$.

R. a) $f'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' - (\ln x)' = \frac{4x^3}{4} - \frac{1}{x} = x^3 - \frac{1}{x} = \frac{x^4 - 1}{x}$.

b) Aflăm punctele critice, $f'(x)=0$,

$$\frac{x^4 - 1}{x} = 0 \Rightarrow x^4 - 1 = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1, \text{ dar } x_1 = -1 \text{ nu este}$$

în domeniul de definiție al funcției și atunci punct critic este $x=1$. În tabelul de semn contează numai semnul expresiei x^2-1 :

x	$-\infty$	-1	0	$+1$	$+\infty$
x^2-1	+++++	0	-----	0	+++++
$f'(x)$	////	////	-----	0	+++++

Pe intervalul $(0,1]$, $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ este descrescătoare, iar pe $[1,+\infty)$ $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ este crescătoare și atunci $x=1$ este punct de extrem.

c) Inegalitatea se mai poate scrie:

$$\ln \sqrt{x} \leq \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \ln \sqrt{x} - \frac{x^2}{4} \leq -\frac{1}{4} \cdot (-1) \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - \ln \sqrt{x} \geq \frac{1}{4}, \text{ ceea ce ne arată că se}$$

compară $f(\sqrt{x})$ cu $f(1)$. Din monotonía funcție de la pct.**b)** avem funcția crescătoare pe

$[1,+\infty)$, adică $\sqrt{x} \geq 1 \Rightarrow f(\sqrt{x}) \geq f(1) \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \ln \sqrt{x} \geq \frac{1}{4}$, care este inegalitatea de demonstrat.

25. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = e^x - x$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbf{R}$.

b) Să se demonstreze că $f(x) \geq 1$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

c) Să se scrie ecuația asimptotei oblice către $-\infty$ la graficul funcției f .

R. a) $f'(x) = (e^x)' - x' = e^x - 1$.

b) Determinăm monotonía funcției și punctele de extreme.

$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$. Tabelul de semn:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-----	0	+++++
$f(x)$			

$x=0$ punct de minim pentru f , adică $f(x) \geq f(1) \Rightarrow f(x) \geq e^0 - 1 = 1$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

c) Ecuația asimptotei oblice este $y = mx + n$, unde

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{xe^{-x}} - 1 \right) = \frac{1}{\infty} - 1 = 0 - 1 = -1, \text{ iar}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x - (-1) \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \frac{1}{\infty} = 0 \text{ și}$$

asimptota oblică către $-\infty$ la graficul funcției va fi $y = -1 \cdot x + 0 \Rightarrow y = -x$.

26. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = e^x - x - 1$.

a) Să se calculeze derivata funcției f .

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .

c) Să se arate că $e^{x^2} + e^x \geq x^2 + x + 2$, pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

R. a) $f'(x) = (e^x)' - x' - 1' = e^x - 1$

b) Determinăm monotonia funcției. Punctele critice

$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$. Tabelul de semn:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-----	0	+++++
$f(x)$			

Pe intervalul $(-\infty, 0]$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ este descrescătoare, iar pe $[0, +\infty)$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ este crescătoare.

c) Din punctul **b)** \Rightarrow punctul de coordonate $(0, 0)$ este punct de minim, adică $f(x) \geq 0 \Rightarrow e^x - x - 1 \geq 0$ și de asemenea $f(x^2) \geq 0 \Rightarrow e^{x^2} - x^2 - 1 \geq 0$. Adunăm cele două relații:

$$\left. \begin{matrix} e^x - x - 1 \geq 0 \\ e^{x^2} - x^2 - 1 \geq 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow e^{x^2} + e^x - x^2 - x - 2 \geq 0 \Rightarrow e^{x^2} + e^x \geq x^2 + x + 2.$$

27. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in (0, \infty)$.

b) Să se determine intervalele de monotonicitate ale funcției f .

c) Să se determine ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției f .

R. a) Se calculează derivata funcției după regula de derivare a câtului

$$f'(x) = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot x'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

b) Pentru studierea monotoniei determinăm punctele critice și facem tabelul de semn al

derivatei. $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$.

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	++++	0	-----

Pe $(0, e]$, $f'(x) \geq 0$ atunci funcția este crescătoare, pe $[e, +\infty)$, $f'(x) \leq 0$ și funcția este descrescătoare.

c) Calculăm limita la $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)' \text{Hospital} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

și atunci dreapta $y=0$, (axa Ox) este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

28. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e} \cdot e^x - 1, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$.

a) Să se studieze continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 1$.

b) Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f .

c) Să se arate că funcția f este concavă pe $(1, +\infty)$.

R. a) Pentru determinarea continuității calculăm limitele laterale în punctul $x_0=1$ și

$$\text{valoarea funcției: } l_s(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(\frac{1}{e} \cdot e^x - 1 \right) = \frac{1}{e} \cdot e - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$l_d(1) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \ln x = \ln 1 = 0, \quad f(1) = \frac{1}{e} \cdot e - 1 = 1 - 1 = 0. \text{ Avem } l_s(1) = l_d(1) = f(1) = 0 \text{ și}$$

atunci funcția este continuă în $x_0=1$.

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{e} \cdot e^x - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{e} \cdot \frac{1}{e^{-x}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{e^{-x+1}} - 1 \right) = \frac{1}{e^{+\infty}} - 1 =$$

$$= \frac{1}{\infty} - 1 = 0 - 1 = -1 \text{ și dreapta } y = -1 \text{ este asimptotă orizontală către } -\infty \text{ la graficul}$$

funcției f .

c) Pentru determinarea concavității unei funcții ne folosim de derivate a II-a a funcției. Pe

intervalul $(1, +\infty)$ funcția este $f(x) = \ln x$ și atunci $f'(x) = \frac{1}{x}, \forall x > 1 \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \forall x > 1$

care este negativă deoarece $x^2 > 0$ pentru orice $x \in (1, +\infty)$. Dacă $f''(x) < 0$ atunci funcția este concavă pe $(1, +\infty)$.

29. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x - \ln x$.

a) Să se arate că $f(1) - f'(1) = 1$.

b) Să se determine punctul de extrem al funcției f .

c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{x}$.

R. a) $f(1) = 1 - \ln 1 = 1 - 0 = 1, f'(x) = x' - (\ln x)' = 1 - \frac{1}{x}$ și $f'(1) = 1 - \frac{1}{1} = 1 - 1 = 0$. Atunci

$$f(1) - f'(1) = 1 - 0 = 1.$$

b) $x_0 = 1$ este punct critic și tabelul de variație la funcției:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	- - - - -	0	+ + + + +
$f(x)$		1	

Pe $(0, 1], f'(x) \leq 0$ și f este descrescătoare, iar pe $[1, +\infty), f'(x) \geq 0$ și f este crescătoare, atunci $A(1, 1)$ este punct de minim.

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \ln x - x}{x} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)^{L'H} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

30. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 + e^x$.

a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

b) Să se arate că funcția f este convexă pe \mathbf{R} .

c) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $f'(x) - f''(x) + f(x) = e^x - 3$.

R. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ care este derivata funcției în punctul $x_0=0$.

$$f'(x) = (x^2)' + (e^x)' = 2x + e^x \text{ și } f'(0) = 2 \cdot 0 + e^0 = 1 \text{ și atunci } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1.$$

b) Convexitatea se determină cu ajutorul semnului derivatei a II-a:

$$f''(x) = (2x + e^x)' = 2 \cdot x' + (e^x)' = 2 + e^x, f''(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R} \text{ și atunci } f \text{ este convexă pe } \mathbf{R}.$$

c) Înlocuim pe f' și f'' de la pct. **a)**, respectiv **b)** se obține: $f'(x) - f''(x) + f(x) = e^x - 3 \Leftrightarrow 2x + e^x - (2 + e^x) + x^2 + e^x = e^x - 3 \Leftrightarrow 2x + e^x - 2 - e^x + x^2 + e^x - e^x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -1$.

31. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x^2 \ln x$.

a) Să se arate că $f'(x) = x(2 \ln x + 1)$, oricare ar fi $x \in (0, +\infty)$.

b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{x \ln x}$.

c) Să se demonstreze că $f(x) \geq -\frac{1}{2e}$, pentru orice $x > 0$.

R. a) $f'(x) = (x^2)' \ln x + x^2 \cdot \ln x = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1)$.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(2 \ln x + 1)}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2 \ln x}{\ln x} + \frac{1}{\ln x} \right) = 2$.

c) Determinăm monotonia funcției:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x(2 \ln x + 1) = 0 \Rightarrow 2 \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}, \text{ tabelul de semn}$$

x	0	$e^{-\frac{1}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$	- - - - -	0	+ + + + +
$f(x)$			

Punctul $x = e^{-\frac{1}{2}}, f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \ln e^{-\frac{1}{2}} = e^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e}$ este punct de minim \Rightarrow

$$f(x) \geq -\frac{1}{2e}, \text{ pentru orice } x > 0.$$

32. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x - \frac{1}{e^x}$.

a) Să se calculeze $f(0) + f'(0)$.

b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + f'(x)}{x}$.

c) Să se arate că funcția f este concavă pe \mathbf{R} .

R. a) $f'(x) = x' - (e^{-x})' = 1 + e^{-x} = 1 + \frac{1}{e^x}$ și $f(0) + f'(0) = 0 - \frac{1}{e^0} + 1 + \frac{1}{e^0} = -1 + 1 + 1 = 1$.

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + f'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \frac{1}{e^x} + 1 + \frac{1}{e^x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x} = 1.$$

$$c) f''(x) = (1 + e^{-x})' = -e^{-x} = -\frac{1}{e^x} < 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f \text{ este concavă pe } \mathbf{R}.$$

33. Se consideră funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = 1 - \frac{2e^x}{x + e^x}$.

a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{2e^x(1-x)}{(x+e^x)^2}$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$.

b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f .

c) Să se arate că $-1 \leq f(x) \leq \frac{1-e}{1+e}$, oricare ar fi $x \geq 0$.

R. a)

$$f'(x) = 1' - \left(\frac{2e^x}{x+e^x} \right)' = -2 \frac{e^x(x+e^x) - e^x(x+e^x)'}{(x+e^x)^2} = -2 \frac{e^x(x+e^x - 1 - e^x)}{(x+e^x)^2} = \frac{2(1-x)}{(x+e^x)^2}.$$

b) Asimptota orizontală $y = l, l = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2e^x}{x+e^x} \right) = 1 - 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x+e^x} = 1 - 2 = -1 \Rightarrow y = -1$.

c) Determinăm monotonia funcției: $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1$, punct de extrem. Tabelul de variație:

x	0	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+++++	0	-----
$f(x)$	-1	$\frac{1-e}{1+e}$	-1

$$f(0) = 1 - \frac{2e^0}{0+e^0} = 1 - 2 = -1, f(1) = 1 - \frac{2e^1}{1+e^1} = \frac{1+e-2e}{1+e} = \frac{1-e}{1+e}.$$

$$x = -1 \text{ punct de maxim} \Rightarrow 0 \leq x \leq +\infty \Rightarrow -1 \leq f(x) \leq \frac{1-e}{1+e}.$$

34. Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = (x^2 + 2x + 3)e^x$.

a) Să se calculeze $f'(x), x \in \mathbf{R}$.

b) Să se determine $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

c) Să se demonstreze că funcția f' este crescătoare pe \mathbf{R} .

R. a)

$$f'(x) = (x^2 + 2x + 3)'e^x + (x^2 + 2x + 3) \cdot (e^x)' = e^x(2x + 2 + x^2 + 2x + 3) = e^x(x^2 + 4x + 5).$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \underset{\substack{\text{conf. def.} \\ \text{derivatei}}}{=} f'(0) = e^0(0^2 + 4 \cdot 0 + 5) = 5.$

c)

$f''(x) = (e^x)'(x^2 + 4x + 5) + e^x(x^2 + 4x + 5)' = e^x(x^2 + 4x + 5 + 2x + 4) = e^x(x^2 + 6x + 9) = e^x(x + 3)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$ $\Rightarrow f'$ este

crescătoare pe \mathbf{R} .

35. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = x\sqrt{x} - 3x$.

a) Să se verifice că $f'(x) = \frac{3\sqrt{x} - 6}{2}$, pentru orice $x \in (0; +\infty)$.

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .

c) Să se demonstreze că $-4 \leq f(x) + f(x^2) \leq 0$, pentru orice $x \in (0; 1]$.

R. a) $f'(x) = x' \sqrt{x} + x \cdot (\sqrt{x})' - 3x' = \sqrt{x} + \cancel{x}^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3 \stackrel{=2)}{=} \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} - 3 \stackrel{-2)}{=} \frac{3\sqrt{x} - 6}{2}.$

b) Semnul derivatei: $f'(x) = 0 \Rightarrow 3\sqrt{x} - 6 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4$

x	0	4	$+\infty$
$f'(x)$	-----	0	+++++

Pe intervalul $(0, 4], f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ este descrescătoare, iar pe $[4, +\infty), f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ este crescătoare.

c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Rightarrow x \in (0, 1] \Rightarrow -2 \leq f(x) < 0, f(x^2) = x^2 \sqrt{x^2} - 3x^2 = x^3 - 3x^2$ și

$x \in [0, 1] \Rightarrow -2 \leq f(x^2) \leq 0 \Rightarrow \left. \begin{matrix} -2 \leq f(x) < 0 \\ -2 \leq f(x^2) \leq 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow -4 \leq f(x) + f(x^2) \leq 0.$